*

Noen syntaktiske derivasjoner i den doxastiske predikatlogikken Kη og enkelte beslektede kalkyler.

av

Morten Rognes

2007

*

§1 Innledning

I det følgende notat skal jeg fremstille en rent logisk kalkyle for konstruksjonen "x tror at α". Man kan med en viss rett si at det dreier seg om å fremstille en forenklet logisk modell. Det bør tydelig understrekes at siktepunktet i dette skrift er ytterst begrenset. Vi skal innskrenke oss til å definere denne kalkylen, som vi betegner med "Kη", rent syntaktisk. Deretter ønsker vi å gi et så fyldig bilde som mulig av hva som kan utledes i den av teoremer. Det er utelukkende dette som er hovedformålet i dette skrift. Det er imidlertid mulig å definere en modellteori for kalkylen og vise at den er semantisk komplett. Dette vil imidlertid ikke bli gjort her. Selvfølgelig vil en semantisk analyse av kalkylen være viktig og dessuten kunne kaste ytterligere lys over den. Men det vil bli gjort i andre skrifter. Forøvrig kan det nevnes at en utførlig semantisk teori for intensjonale logikker av den typen vi fremstiller her er gitt i Rognes [1]. Det vil ikke være spesielt vanskelig å tillempe resultatene i Rognes [1] på kalkylene i dette skrift. Vi begrenser oss til den mer beskjedne oppgaven vi har nevnt og utsetter en modellteoretisk analyse til et senere arbeid.

Det er naturligvis en rekke interessante problemer som kan stilles i forbindelse med trosbegrepet, og derfor en logisk teori om tro av den typen som fremstilles her. Men vårt anliggende er hovedsakelig av en teknisk natur. Når det gjelder gjelder mer inngående filosofiske betraktninger rundt de forskjellige aspekter ved trosbegrepet må det henvises til andre arbeider i litteraturen som tar opp dette tema. Et klassisk arbeid er Hintikkas "Knowledge and Belief", Hintikka [1]. Men vi skal som antydet ikke gå nærmere inn på dette.

Det følgende arbeid kan sies å være en analyse av hva som hva som følger om man antar at trosfeltet til en person er hva vi vil kalle *logisk organisert*. Vi skal straks gi en mer presis definisjon av dette.Men la meg med en gang si at en person med et logisk organisert trosfelt er en fiktiv idealisering. Ingen virkelig person av kjøtt og blod kan sies å ha et trosfelt av denne karakter. Men personer med et logisk organisert trosfelt kunne sies å spille den samme rolle i logikken til begrepet tro som fullkomne sirkler spiller i geometrien, eller rene massepunkter i den teoretiske mekanikk.

Med *trosfeltet til en person* mener vi mengden av alle de utsagn som vedkommende faktisk tror er sanne. Dette trosfeltet kan selvfølgelig variere fra person til person. Vi oppfatter det altså som en mengde med utsagn.

Når det gjelder utsagn skal vi forutsette at det til ethvert utsagn finnes et som er negasjonen av det, videre at man kan danne konjunksjonen av to vilkårlige utsagn og at denne konjunksjonen også er et utsagn. Klassen av alle utsagn er slik at den vil innholde en delmengde av utsagn, de logisk nødvendige utsagn. Disse kaller vi for de logisk sanne utsagn. Videre skal den inneholde en klasse av utsagn som er logisk nødvendig usanne. Disse kaller vi for kontradiktoriske utsagn. Et utsagn som hverken er en logisk sannhet eller et kontradiktorisk utsagn kaller vi for et kontingent utsagn. Negasjonen av et utsagn forutsetter vi at er et sant utsagn hvis og bare hvis utsagnet selv er usant. Et utsagn antar vi alltid enten er sant eller usant. Konjunksjonen av to utsagn er sant hvis og bare hvis begge konjunktene er sanne. Vi skal også ta det for gitt at det over mengden av utsagn finnes en logisk konsekvens relasjon med de vanlige egenskaper. En utsagnsmengde Δ kaller vi for *deduktivt lukket* dersom det er slik at for ethvert utsagn u som er med i den er det også slik at alle utsagn u' som er logiske konsekvenser av u også er med. Vi kaller Δ for en *logisk konsistent* utsagnsmengde om det ikke finnes noe utsagn u som er slik at konjunksjonen av u og negasjonen av u er med. Videre kaller vi en utsagns mengde Δ for *konjunktivt lukket* hvis og

bare hvis konjunksjonen av to utsagn er med i Δ dersom og bare dersom begge konjunktene også er det.

En utsagnsmengde Δ skal vi kalle for *rasjonelt organisert* hvis og bare hvis den oppfyller de følgende betingelser: For det første krever vi at Δ er deduktivt og konjunktivt lukket utsagnsmengde. For det andre kreves det at alle logisk sanne utsagn er med i Δ. Til sist kreves det at Δ er konsistent. En rasjonelt organisert utsagnsmengde er altså i hovedsak det man kunne kalle for et konsistent deduktivt lukket system av utsagn.

Vi kaller en person for *en person med et rasjonelt organisert trosfelt* hvis og bare hvis trosfeltet til denne personen utgjør en rasjonalt organisert utsagnsmengde. Dette innebærer altså at trosfeltet utgjør en utsagnsmengde som oppfyller de kravene vi nevnte. I det følgende brukes uttrykket "η(x)" som forkortelse for " x er en person med et rasjonelt organisert trosfelt".

Logikken Kη, som vi definerer i neste avsnitt, kan sies å representere en kodifisering av alle de egenskapene som kan tilskrives en person med et fullstendig logisk organisert trosfelt. En systematisk fremstilling av disse egenskapene synes i mine øyne å være en interessant og vesentlig oppgave.

§2 Kalkylen Kη

Språket til kalkylen Kη er et vanlig predikatlogisk språk med identitet utvidet med det monadiske predikatet "η(x)" som leses " x er en person med et rasjonelt organisert trosfelt ", samt den setningsdannende konstruksjonen "T;x(α)" som gir en formel som resultat når den anvendes på en term og en formel i L. Utrykket "T;x(α)" leses "x tror at α". Vi skal anta at språket L til kalkylen Kη inneholder de vanlige variabeltegnene, videre skal det inneholde en, muligens tom, mengde med konstanter. Vi vil vanligvis betegne dem med c;0,c;1,... osv. Språket inneholder de vanlige setningslogiske konnektivene "v", "&", "~", "→" og "↔" samt kvantorene. Allkvantoren betegner vi med "A", eksistenskvantoren med "E". Når det gjelder den predikatlogiske delen av språket L forutsetter vi at vi bruker et vanlig standardsett av setningslogiske aksiomer og et vanlig standardsett av aksiomer for kvantorene og identitetspredikatet.[1] Når det gjelder kalkylen Kη forutsetter vi videre at vi bruker de vanlige slutningsreglene for den rent predikatlogiske delen, nemlig *modus ponens* og *universell generalisering*. Modus ponens sier at dersom α og α→β er to formler i L som er teoremer så er β det også. Regelen universell generalisering sier at dersom α er en vilkårlig formel i L som er et teorem er også formelen (Ax)α, der x er et variabeltegn i L, et teorem.

---

[1] Når det gjelder predikatlogikken benytter vi de følgende aksiomskjemaer for setningslogikk:
Q1: α→(β→α)
Q2: α→(β→γ) → (α→β) → (α→γ)
Q3: (~β → ~α) → (α→ β)
Vi benytter følgende definisjoner av de setningslogiske konnektivene:
α&β = ~(α→~β)
αvβ = ~((~α) & (~β))
α↔β = (α→β)& (β→α)
Når det gjelder predikatlogiske aksiomer benytter vi de følgende skjemaer:
Q4: (Ax)α → α;x[a] der a er enten en konstant eller variabel som er substitutibel for x i α
Q5 (Ax)(α→β) →. α→ (Ax)β forutsatt at variabelen x ikke forekommer fri i α
Når det gjelder eksistenskvantoren bruker vi den følgende definisjon:
(Ex)α = ~(Ax)~α
Når det gjelder aksiomer for identitet benyttes:
Q6 x=x
Q7 x=y → α ↔ β forutsatt at β er nøyaktig som α bortsett fra at β har en fri forekomst av y på en eller flere av de steder der α har en fri forekomst av x.

Når det gjelder predikatet "η(x)" og konstruksjonen "T;x(α)" inneholder kalkylen Kη bare to aksiomskjemaer, nemlig:

A1 $\eta(x) \rightarrow .\ T;x(\alpha\&\beta) \leftrightarrow T;x(\alpha)\ \&\ T;x(\beta)$
A2 $\eta(x) \rightarrow\ \sim T;x(\ \alpha\ \&\ \sim\alpha)$

Det første av disse aksiomene uttrykker i vanlig språk at dersom x er en person med et rasjonelt organisert trosfelt så er det slik at denne tror at konjunksjonen av to utsagn er sann hvis og bare hvis vedkommende tror at hver av konjunktene er sanne. Det andre aksiomet sier, hvis vi tillater oss å gjengi det litt uformelt, at dersom x er en person med et rasjonelt organisert trosfelt er det ikke slik at x tror at både et utsagn og dets negasjon begge er sanne. I lys av den lesemåten som ble nevnt for predikatet "η(x)" virker dette rimelig. La oss se litt nærmere på begrunnelsen for dette. Anta η(x), med andre ord at trosfeltet til x er rasjonelt organisert. Dette innebærer at det er lukket under konjunksjon. Har vi da at T;x(α&β) innebærer dette at konjunksjonen av de to utsagnene α og β er med i trosfeltet til x. Men da må utsagnet α såvel som utsagnet β være med i dette trosfeltet. Dette innebærer selvfølgelig at x tror at α og at x tror at β, hvilket vil si at T;x(α) & T;x(β). Tilsvarende vil vi ha at det omvendte holder. Har man T;x(α) og T;x(β) følger det selvfølgelig at utsagnene α og β er med i trosfeltet til x. Siden dette trosfeltet etter forutsetningen er rasjonelt organisert er det per definisjon slik at det inneholder konjunksjonen av to utsagn dersom det inneholder begge konjunktene. Dette innebærer at også konjunksjonen av de to utsagnene α og β er med. Med andre ord har vi at T;x(α&β).

Tilsvarende overveielser viser at A2 er sann. Har vi at η(x) innebærer dette at trosfeltet til x er rasjonelt organisert. Da har vi at det per definisjon er konsistent. Men skulle vi da ha hatt Tror(α & ~α) ville vi ha hatt at såvel utsagnet α som negasjonen av α var med i trosfeltet til x noe som ville stride mot at det var konsistent.

I tillegg til slutningsreglene MP, modus ponens, og UG, universell generalisering, inneholder kalkylen Kη også de følgende to slutningsregler, nemlig

R1 $\vdash \alpha \rightarrow \vdash \eta(x) \rightarrow T;x(\alpha)$
R2 $\vdash (\alpha\rightarrow\beta) \rightarrow \vdash \eta(x) \rightarrow (T;x(\alpha) \rightarrow T;x(\beta))$

Regelen R1 utrykker at dersom en formel α i språket det her dreier seg om er et teorem så er også setningen η(x) → T;x(α) et teorem. Reglen gir uttrykk for det synspunkt at en person med et rasjonelt organisert trosfelt tror ethvert utsagn som er en logisk sannhet. Dette er rimelig utfra den definisjonen vi har gitt av η(x). For er α et teorem i kalkylen er det ytterst rimelig å tro at den uttrykker et utsagn som er en logisk sannhet. Da kan det ikke være logisk mulig at det samtidig er slik at η(x), dvs. at x er en person med et rasjonelt organisert trosfelt, og at α som en logisk sannhet ikke er med i det. Grunnen er selvfølgelig at dersom x er en person med et rasjonelt organisert trosfelt så inneholder trosfeltet til x alle utsagn som er logiske sannheter.

Den andre regelen uttrykker den tanke at enhver person med et rasjonelt organisert trosfelt som tror at et utsagn er riktig også tror at alle de utsagn som er logiske konsekvenser av dette er riktige. Anta at α→β er et teorem. Da er det klart at denne kondisjonalsetningen uttrykker et logisk nødvendig utsagn. Det innebærer at det utsagnet som β uttrykker nødvendigvis må være en logisk konsekvens av utsagnet α. Antar man da at η(x) og at det samtidig er slik at T;x(α) og ~T;x(β) innebærer det siste at utsagnet β ikke er med i trosfeltet til x, mens utsagnet α er det. Men da kan ikke trosfeltet til x være rasjonelt organisert siden det under disse omstendigheter ikke er lukket under logisk konsekvens.

Det virker derfor som om disse to reglene er gyldige om vi har i tankene den tolkningen av predikatet "η(x)" og konstruksjonen "T;x(α)" som vi har fastlagt.

§3 Alternative aksiomatiseringer av kalkylen Kη

Vi skal i det følgende betrakte endel kalkyler som er ekvivalente med kalkylen Kη. Disse ekvivalente kalkylene betegnes med Kη;a, Kη;b og Kη;c. Grunnen til at vi bruker en del plass på dette er at det alltid til en hvis grad er opplysende når man forsøker å sette seg inn i en teori å se på andre måter å formulere den på.

§3.1 Kalkylen Kη;a

Denne kalkylen har akkurat de samme setningslogiske, predikatlogiske og identitetslogiske aksiomene som kalkylen Kη. Videre er fremdeles modus ponens og universell generalisering slutningsregler. Den inneholder også R1 som en slutningsregel og A1 som et aksiom. Men den nye kalkylen skiller seg fra Kη ved at man har erstattet slutningsregelen R2 med den følgende, tilsynelatende sterkere, slutningsregel:

R3 $\quad \vdash (\alpha \leftrightarrow \beta) \;\rightarrow\; \vdash \eta(x) \rightarrow (T;x(\alpha) \leftrightarrow T;x(\beta))$

Dessuten er aksiomet A2 erstattet med:

A3 $\quad \vdash \eta(x) \rightarrow (T;x(\alpha) \rightarrow \sim T;x(\sim\alpha))$

Dermed har vi definert kalkylen Kη;a fullstendig.

Er S en kalkyle av den typen vi arbeider med her skal vi bruke uttrykket "S |- α" som forkortelse for uttrykket "α er et teorem i kalkylen S".

Man kan nå bevise at mengden av teoremer i kalkylen Kη er inkludert i mengden av teoremer i kalkylen Kη;a og omvendt. Denne satsen kan formuleres konsist slik:

Teorem: Er α en formel i L har man at $K\eta \vdash \alpha \;\leftrightarrow K\eta;a \vdash \alpha$

Bevis: Vi viser først at implikasjonen mot høyre i satsen holder. Vi må med andre ord vise at ethvert teorem i Kη er et teorem i Kη;a. Siden alle aksiomene og slutningsreglene er identiske i de to systemene bortsett fra aksiomet A2 og slutningsregelen R2 er det nok å vise at R2 kan utledes i Kη;a som en utledet regel og dessuten vise at A2 er et teorem i Kη;a.

Vi gir først et bevis for at slutningsregelen R2 kan utledes i Kη;a.
Anta (1) $\vdash(\alpha\rightarrow\beta)$. Nå har man som et setningslogisk teorem: (2) $\vdash (a\rightarrow\beta) \leftrightarrow (\alpha \leftrightarrow (\alpha\&\beta))$. Fra (1) og (2) følger da ved hjelp av modus ponens at (3) $\vdash (\alpha \leftrightarrow (\alpha\&\beta))$. Fra dette og R3 kan man slutte:

(4) $\vdash \eta(x) \rightarrow (T;x(\alpha) \leftrightarrow T;x(\alpha \,\&\, \beta))$

Men ved hjelp av setningslogikk følger fra (4) at (5) $\vdash \eta(x) \rightarrow (T;x(\alpha) \rightarrow T;x(\alpha \,\&\, \beta))$
Nå er A1 også et aksiom i Kη;a og derfor et teorem. Vi har derfor:

(6) $\vdash \eta(x) \rightarrow. T;x(\alpha\&\beta) \leftrightarrow T;x(\alpha) \,\&\, T;x(\beta)$

Fra (6) har vi så ved hjelp av setningslogikk (7) $\vdash\eta(x) \rightarrow. T;x(\alpha\&\beta) \rightarrow T;x(\beta)$. Men fra (5) og (7) følger det vi ønsker nemlig (8) $\vdash\eta(x) \rightarrow. T;x(\alpha) \rightarrow T;x(\beta)$. Dette viser at slutningsregelen R2 lar seg utlede i Kη;a.

Vi må også vise at aksiomet A2 er et teorem i Kη;a. Vi har ved substitusjon i A1:
(9) |- η(x) → T;x(α &~α) ↔ T;x(α) & T;x(~α). Fra dette følger ved hjelp av modus ponens og velkjente setningslogiske teoremer at

(10) |- η(x) → ((T;x(α)→ ~T;x(~α)) → ~T;x(α &~α))

Men fra dette og A3 følger at A2 er et teorem ved hjelp av ren setningslogikk.

Vi har nå vist at R2 og A2 lar seg utlede i Kη;a. Alle teoremer i Kη må derfor være teoremer i Kη;a

Det er nå nødvendig å godtgjøre implikasjonen mot venstre i satsen ovenfor. Dette innebærer at vi må vise at alle teoremene i Kη;a er inkludert i mengden av alle de teoremer som lar seg utlede i kalkylen Kη. Det vil være nok å vise at slutningsregelen R3 og aksiomskjemaet A3 kan utledes i Kη.

La oss først ta for oss slutningsregelen R3. Anta (1) |- α↔β. Da har vi åpenbart ved hjelp av rent setningslogiske satser og modus ponens at (2) |- α→β og (3) |- β→α. Fra det første, (2), følger ved hjelp av regelen R2 i Kη : (4) |- η(x) → (T;x(α) → T;x(β)). Ved hjelp av den samme regel og (3) har vi likeledes: (5) |- η(x) → (T;x(β) → T;x(α)). Men fra (4) og (5) følger ved hjelp av modus ponens og rene setningslogiske teoremer at
(6) |- η(x) → (T;x(α) ↔ T;x(β))

La oss så vise at aksiomet A3 er et teorem i Kη. Ved substitusjon i aksiomskjemaet A1 har man (7) η(x) →. T;x(α& ~α) ↔ T;x(α) & T;x(~α) Fra dette følger så ved hjelp av A1 og setningslogiske teoremer (8) |- η(x) → ~(T;x(α) & T;x(~α)). Herav har man så, igjen ved hjelp av setningslogikk, det vi ønsker: (9) |- η(x) → (T;x(α) → ~T;x(~α)). Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for at de to kalkylene er ekvivalente. **QED**.

§3.2 Kalkylen Kη;b

Vi tar nå for oss den andre reaksiomatiseringen av Kη. Vi betegner med Kη;b den kalkylen som har nøyaktig de samme setningslogiske, predikatlogiske og identitetsteoretiske aksiomene som Kη. I tillegg har denne nye kalkylen slutningsreglene modus ponens og universell generalisering. Når det gjelder predikatet "η(x)" og operatoren "T;x(α)" inneholder Kη;b slutningsregelen R1, men ikke aksiomskjemaet A1. Dette er nå erstattet med følgende skjema:

A4 η(x) → (T;x(α→β)→ (T;x(α) → T;x(β)))

I tillegg til dette aksiomskjemaet har Kη;b også A2 som aksiomskjema. Kalkylen har altså A2 og A4 som aksiomskjemaer for konstruksjonen "T;x(α)". Slutningsreglene er utelukkende modus ponens, universell generalisering og R1. Vi har nå definert kalkylen Kη;b fullstendig.

Man ser at dette systemet har en viss likhet med det modallogiske systemet for setningslogikk som ofte betegnes med KD. [2]

Vi skal nå bevise følgende sats som viser at Kη;b er ekvivalent med Kη:

Teorem: Er α en formel i L har man at Kη |- α ↔ Kη;b |- α

[2] Systemet KD er beskrevet i Chellas[1] side 131. Det svakere systemet K som består i at man fjerner aksiomskjemaet D, L(α) →M(α), som svarer til vårt skjema η(x) → ~T;x(α&~α), kaller Chellas for den minste normale modale systemet. Egenskaper ved normale modalsystemer er utførlig behandlet i Chellas [1], side 113-130. K utvidet med T, dvs. skjemaet L(α)→ α kalles ofte for T. Det ble først foreslått av Feys i Feys [1].

Bevis: Vi viser først at alle teoremene i Kη er blant teoremene i Kη;b. For å vise dette er det tilstrekkelig å vise at R2 og A1 kan utledes i Kη;b. La oss først ta for oss R2. Anta (1) |- (α→β). Da har vi ved hjelp av R1, som jo er en slutningsregel i Kη;b, at (2) |- η(x) → T;x(α→β). Men fra dette og A4 følger ved hjelp av rent setningslogiske satser at (3) |- η(x) → .T;x(α) →T;x(β). Dette viser at R2 kan utledes i Kη;b.

Når det gjelder A1 merker vi oss først at vi har ved hjelp av ren setningslogikk: (4) |- (α&β) → α og (5) |- (α&β) → β. Fra (4) og (5) kan vi slutte følgende ved hjelp av regelen R2, som vi nå har vist at holder i Kη;b, at

(6) |- η(x) → .T;x(α&β) →T;x(α) og
(7) |- η(x) → .T;x(α&β) →T;x(β).

På den annen side har vi: (8) |- α → (β → (α&β). Ved hjelp av dette og R2 har vi: (9) |- η(x) → .T;x(α) →T;x(β→ (α&β)). Ved substitusjon i A4 ser man: (10) |- η(x) → . (T;x(β→(α&β)→ (T;x(β) → T;x(α&β))). Fra (9) og (10) følger ved hjelp av setningslogiske satser: (11) |- η(x) → . (T;x(α)→ (T;x(β) → T;x(α&β))). Dette er ekvivalent med: (12) η(x) → . (T;x(α) & T;x(β). → T;x(α&β)). Men fra (6), (7) og (12) kan man slutte ved hjelp av setningslogikk at (13) η(x) → . (T;x(α) & T;x(β). ↔ T;x(α&β)). Dette viser at A1 kan utledes i Kη;b. Demed har vi bevist den ene halvdelen av satsen.

Det er imidlertid også nødvendig å vise at alle teoremene i Kη;b er blant teoremene i Kη. Det er i såfall tilstrekkelig å vise at aksiomet A4 kan utledes i Kη. Men dette er nesten trivielt. Vi har som et rent setningslogisk teorem: (14) |- ((α → β)&α. → β). Ved hjelp av regelen R2 følger da: (15) |- η(x) → (T;x((α → β)&α) → T;x(β)). Ved substitusjon i aksiomet A1 ser man at (16) |- η(x) →. T;x((α→β)& α) ↔ T;x(α→β) & T;x(α). Fra (15) og (16) følger ved hjelp av setningslogiske teoremer:

(16) |- η(x) →. T;x(α → β)&T;x(α) → T;x(β)) Men herav har man ved hjelp av setningslogikk: (17) |- η(x) → (T;x(α→β)→ (T;x(α) → T;x(β))) som åpenbart er det vi ønsker. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED.**

§3.3 Kalkylen Kη;c

Språket til kalkylen Kη;c er nøyaktig som det til Kη bortsett fra at vi nå har erstattet den primitive konstruksjonen "T;x(α)" med konstruksjonen "CT;x(α)". Uttrykket "CT;x(α)" leses " Det er logisk forenelig med alt det x tror at α". Konstruksjonen CT er selvfølgelig en primitiv, ikke- definert konstruksjon i dette nye språket som akkurat i denne paragrafen betegnes med L'. Kalkylen Kη;c har som aksiomer alle de setningslogiske, predikatlogiske og identitetsteoretiske aksiomene i L'. I tillegg inneholder Kη;c de følgende slutningsregler i tillegg til modus ponens og universell generalisering:

W1 |- α → |- η(x) → ~CT;x(~α)
W2 |- α↔b → |- η(x) → CT;x(α) ↔ CT;x(β)

Endelig inneholder kalkylen Kη;c de følgende to aksiomskjemaer i L':

WA1 η(x) →. CT;x(αvβ) ↔ CT;x(α) v CT;x(β)
WA2 η(x) → CT;x(α v ~α)

Dermed har vi avgrenset kalkylen Kη;c fullstendig.[3]

[3] Denne aksiomatiseringen av Kη med CT som primitiv operator er i visse henseende analogt med et system som ble foreslått av von Wright og som von Wright kalte M. Sløyfer man aksiomet α→ M(α) fra von Wrights

Vi skal nå først vise den følgende sats:

Teorem: Definer "CT;x(α)" ved CT;x(α) ↔ ~T;x(~α). Da har man at slutningsreglene W1 og W2 kan utledes i Kη. I tillegg kan man vise at aksiomskjemaene WA1 og WA2 er teoremer i Kη.

Bevis: (i) Vi viser først at slutningsregelen W1 kan utledes i Kη. Anta (1) |- α. Siden vi har som et setningslogisk teorem at (2) |- α ↔ ~~α har vi ved hjelp av R3, som vi tidligere har vist lar seg utlede i Kη, at (3) |- η(x) → T;x(α) ↔ T;x(~~α). Fra (1) følger ved hjelp av R1: (4) |- η(x) → T;x(α). Fra (4) og (3) har man ved hjelp av setningslogikk:
(5) |- η(x) → T;x(~~α). Fra dette kan man igjen ved hjelp av setningslogikk slutte:
(6) |- η(x) → ~~T;x(~~α). Ved hjelp av definisjonen av konstruksjonen CT følger da det man ønsker, nemlig: (7) |- η(x) → ~CT;x(~α). Dette viser utledbarheten av regelen W1.

(ii) Det er også nødvendig å vise at W2 kan utledes i Kη. Anta derfor (8) |- α ↔ β. Ved hjelp av setningslogikk har vi da (9) |- (~α) ↔ (~β) Fra dette følger ved hjelp av den utledbare regelen R3: (10) |- η(x) → (T;x(~α) ↔ T;x(~β)) Ved hjelp av elementære setningslogiske teoremer kan man fra dette slutte (11) |- η(x) → (~T;x(α~) ↔~ T;x(~β)) I lys av definisjonen av CT innebærer dette: (12) |-η(x) → (CT;x(α) ↔ CT;x(β)) , som er det vi ønsker.

(iii) Ved substitusjon i A1 har man:
(13) |- η(x) → (T;x((~α)&(~β)) ↔ T;x(~α) & T;x(~β)). Nå har man som et setningslogisk teorem : (14) |- (~α) & (~β) ↔ ~(α v β). Ved hjelp av R3 kan man da slutte:
(15) |- η(x) →. T;x((~α) & (~β)) ↔ T;x(~(α v β)) Fra (15) kan man så slutte ved hjelp av elementær setningslogikk: (16) |- η(x) →. ~T;x((~α) & (~β)) ↔ ~T;x(~(α v β)). Fra (13) og (16) har man atter ved hjelp av ren setningslogikk at

(17) |- η(x) →. ~T;x(~(α v β)) ↔ ~T;x(~α) v ~T;x(~β))

Ved hjelp av definisjonen av CT følger da: |- η(x) →. CT;x(αvβ) ↔ CT;x(α) v CT;x(β). Dette viser at WA1 er utledbar i Kη.

(iv) Vi har (18) |- (α& ~α) ↔ ~(αv ~α). Ved hjelp av regelen R3 kan man da slutte:
(19) |- η(x) →. T;x(α& ~α) ↔ T;x(~(αv ~α)). Fra (19) og A2 følger ved hjelp av setningslogikk: (20) |- η(x) → ~ T;x(~(αv ~α)). Herav har man så ved hjelp av definisjonen av CT: |- η(x) → CT(α v ~α). Dette viser at også WA2 er utledbar i Kη. Dermed har vi bevist at alle teoremer i Kη;c også kan utledes i Kη. **QED**.

Teorem: Definer "T;x(α)" ved T;x(α) ↔ ~CT;x(~α). Gitt denne definisjonen har man at slutningsreglene R1 og R2 samt aksiomskjemaene A1 og A2 lar seg utlede i Kη;c.

Teoremet innebærer altså at alle teoremene i Kη lar seg utlede i Kη;c.

Bevis: (i) Når det gjelder slutningsregelen R1 går vi frem slik: Anta (1) |- α . Da har vi ved hjelp av W1 at (2) |- η(x) → ~CT;x(~α). Men fra dette og definisjonen av T følger umiddelbart: (3) |- η(x) → T;x(α). Dette viser at R1 lar seg utlede i Kη;c

(ii) Vi tar så for oss regelen R2 og viser hvordan den kan utledes i Kη;c. Anta (4) |- α → β. Fra dette følger ved hjelp av setningslogikk: (5) |- ~α ↔ (~αv~β). Fra dette kan man ved hjelp av regelen W2 slutte: (6) |- η(x) → .CT;x(~α) ↔ CT;x(~αv~β) Ved hjelp

---

system får man et setningslogisk system som i visse henseende ligner på den setningslogiske varianten av Kη;c. Når det gjelder systemet M se von Wright [1]. At systemet T og systemet M er ekvivalente ble først vist i Sobociński [1]. En utførlig redegjørelse for de grunnleggende modale systemene T, S4 og S5 finner man i Hughes & Cresswell [1].

av WA1 impliserer dette (7) |- η(x) → .CT;x(~α) ↔ (CT;x(~α)v CT;x(~β)). Igjen har man ved hjelp av setningslogikk: (8) |- η(x) → .CT;x(~β) → (CT;x(~α). Man må her huske på at følgende er et setningslogisk teorem: |- (β→α) ↔ (α ↔ (αvβ). Fra (8) har man
(9) |- η(x) → .~CT;x(~α) ↔ ~CT;x(~β). Men fra dette og definisjonen av T følger det vi ønsker, nemlig: (10) |- η(x) → T;x(α) → T;x(β). Dette viser at R2 holder.

(iii) Vi må vise at aksiomskjemaet A1 kan utledes i Kη;c. Man har i kraft av ren setningslogikk : (11) |- (~α) v (~β) ↔ ~(α&β). Fra dette følger ved hjelp av regelen W2:
(12) |- η(x) → . CT;x((~α) v (~β)) ↔ CT;x(~(α&β)). Ved substitusjon i skjemaet WA1 har man: (13) |- η(x) →. CT;x((~α)v(~β)) ↔ CT;x(~α) v CT;x(~β). Fra (12) og (13) har vi ved hjelp av setningslogikk: (14) |- η(x) →. CT;x(~α) v CT;x(~β) ↔ CT;x(~(α&β)). Ved konversjon får vi herav: (15) |- η(x) →. ~(CT;x(~α) v CT;x(~β)) ↔ ~CT;x(~(α&β)). Fra dette har vi så ved hjelp av de Morgans lover:

(16) |- η(x) →. ~CT;x(~α) & ~CT;x(~β) ↔ ~CT;x(~(α&β)) Ved hjelp av definisjonen av T og setningslogikk når vi da frem til det vi ønsker, nemlig A1:
(17) |- η(x) →. T;x(α&β) ↔ T;x(α) & T;x(β).

(iv) Som nevnt må vi også vise at A2 kan utledes i Kη;c. Man har åpenbart:
(18) |- (α v ~α) ↔ ~(α & ~α). Ved hjelp av W2 har man derfor :
(19) |- η(x)→. CT;x(α v ~α)↔ CT;x(~(α & ~α)). Fra dette og WA2 kan man slutte ved hjelp av setningslogikk: (20) |- η(x) → ~~CT;x(~(α & ~α)). Dette er i sin tur, i lys av den definisjonen vi har gitt av T, ekvivalent med: (21) η(x) → ~T;x(α & ~α). Dermed har vi vist at A2 også kan utledes i Kη;c.

Vi har nå gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED.**

De to satsene viser tilsammen at kalkylene Kη;c og Kη er ekvivalente. Ethvert teorem i det ene systemet kan utledes i det andre og vice versa.

§4 Elementære satser i kalkylen Kη

Det er av en viss interesse å kunne danne seg et oversiktlig og fyldig bilde av hva som faktisk kan utledes av formler i kalkylen Kη. Vi skal forsøke å bidra til at leseren får et slikt bilde i dette og de neste avsnitt. Det er da av spesiell interesse å se på hva som kan utledes i kalkylen Kη når vi ikke bruker aksiomskjemaet A2 i bevisene. Denne svakere kalkylen, som fås fra Kη ved å fjerne skjemaet A2, kaller vi i det følgende for Kη-.

Vi har bruk for to begreper for å kunne formulere endel teoremer på en kompakt måte.

Uttrykket "Konj/i,n,m/(α;i)" leses "Konjunksjonen av de diverse formlene α;i ettersom i gjennomløper tallrekken fra og med m til og med n". Det defineres induktivt slik:

Definisjon

(i) Konj/i,m,m+0/(α;i) = α;m

(ii) Konj/i,m,m+(n+1)/(α;i) = (Konj/i,m,m+n/(α;i))& α;(m+n+1)

Vi skal også tillate oss å bruke et tilsvarende uttrykk i forbindelse med disjunksjoner av formler i L, nemlig "Disj/i,m,n/(α;i)". Dette uttrykket leses "Disjunksjonen av de diverse formlene α;i ettersom i gjennomløper tallrekken fra og med m til og med n". Tilsvarende defineres "Disj/i,m,n/(α;i)" induktivt slik:

Definisjon

(i) $Disj/i,m,m+0/(\alpha;i) = \alpha;m$
(ii) $Disj/i,m,m+(n+1)/(\alpha;i) = (Disj/i,m,m+n/(\alpha;i))v\ \alpha;(m+n+1)$

I det følgende brukes "o" som plassholder for et av de følgende setningslogiske konnektivene: "→", "↔", "v" og "&".

Teorem (Elementærteorem 1)
De følgende to slutningsregler lar seg utlede i Kη- om n>=1 :
(a) $\vdash Konj/i,1,n/(\alpha;i) \rightarrow \beta \rightarrow \vdash \eta(x) \rightarrow Konj/i,1,n/(T;x(\alpha;i)) \rightarrow T;x(\beta)$
(b) $\vdash \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \vdash \eta(x) \rightarrow CT;x(\alpha) \rightarrow CT;x(\beta)$

Bevis: Vi beviser først punkt (a) i teoremet. Dette gjøres ved induksjon. For n=1 har vi at $Konj/i,1,n/(\alpha;i) = \alpha;1$. Man ser at slutningsregelen da er rett og slett R2:
(1) $\vdash \alpha;1 \rightarrow \beta \rightarrow \vdash \eta(x) \rightarrow T;x(\alpha;1) \rightarrow T;x(\beta)$
Anta nå at (a) holder for n>=1. Vi skal da vise at den også holder for n+1. Anta
(2) $\vdash Konj/i,1,n+1/(\alpha;i) \rightarrow \beta$. Fra definisjonen av Konj ser man at dette innebærer
(3) $\vdash Konj/i,1,n/(\alpha;i) \ \&\ \alpha;(n+1) \rightarrow \beta$. Ved hjelp av setningslogikk kan man fra dette slutte:
(4) $\vdash Konj/i,1,n/(\alpha;i). \rightarrow (\alpha;(n+1) \rightarrow \beta)$. Siden slutningsregelen etter induksjonshypotesen holder for n har vi derfor: (5) $\vdash \eta(x) \rightarrow. Konj/i,1,n/(T;x(\alpha;i)) \rightarrow (T;x(\alpha;(n+1) \rightarrow \beta)$. Nå har vi tidligere bevist at følgende holder:
(6) $\vdash \eta(x) \rightarrow .T;x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (T;x(\alpha) \rightarrow T;x(\beta))$. Setter man her inn $\alpha;(n+1)$ for α får vi:
(7) $\vdash \eta(x) \rightarrow .T;x(\alpha;(n+1) \rightarrow \beta) \rightarrow (T;x(\alpha;(n+1)) \rightarrow T;x(\beta))$. Fra dette og (5) følger i sin tur ved hjelp av setningslogikk: (8) $\vdash \eta(x) \rightarrow . Konj/i,1,n/(T;x(\alpha;i)) \ \&\ T;x(\alpha;(n+1) \rightarrow T;x(\beta)$.
Men i lys av definisjonen av Konj har vi

$$Konj/i,1,n+1/(T;x(\alpha;i)) = Konj/i,1,n/(T;x(\alpha;i)) \ \&\ T;x(\alpha;(n+1)$$

Fra dette og (8) følger så det vi ønsker, nemlig:
(9) $\vdash \eta(x) \rightarrow Konj/i,1,n+1/(T;x(\alpha;i)) \rightarrow T;x(\beta)$. Dette viser at (a) holder.

Vi gir så et bevis for (b). Anta (10) $\vdash \alpha \rightarrow \beta$. Fra dette har man ved hjelp av setningslogikk: (11) $\vdash \sim\beta \rightarrow \sim\alpha$. Fra dette har man ved hjelp av R2:
(12) $\vdash \eta(x) \rightarrow T;x(\sim\beta) \rightarrow T;x(\sim\alpha)$. Herav følger så ved hjelp av setningslogikk:
(13) $\vdash \eta(x) \rightarrow \sim T;x(\sim\alpha) \rightarrow \sim T;x(\sim\beta)$. I lys av definisjonen av CT har vi fra dette:
$\vdash \eta(x) \rightarrow CT;x(\alpha) \rightarrow CT;x(\beta)$. Dette er hva vi ønsker. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED.**

Teorem (Elementærteorem 2)

For alle n>= 1 har man at de følgende formler er teoremer i kalkylen Kη- :

(i) $\eta(x) \rightarrow. T;x(\alpha)\ \&\ T;x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow T;x(\beta)$
(ii) $\eta(x) \rightarrow. T;x(Konj/i,1,n/(\alpha;i) \rightarrow \beta)\ \&\ Konj/i,1,n/(T;x(\alpha;i)) \rightarrow T;x(\beta)$
(iii) $\eta(x) \rightarrow. T;x(\alpha \leftrightarrow \beta) \rightarrow. T;x(\alpha) \leftrightarrow T;x(\beta)$
(iv) $\eta(x) \rightarrow. T;x(\alpha \leftrightarrow \beta) \rightarrow. T;x(\alpha o \gamma) \leftrightarrow T;x(\beta o \gamma)$
(v) $\eta(x) \rightarrow. T;x(\alpha \leftrightarrow \beta) \rightarrow. T;x(\gamma o \alpha) \leftrightarrow T;x(\gamma o \beta)$
(vi) $\eta(x) \rightarrow. T;x(\alpha \leftrightarrow \beta) \rightarrow. T;x(\sim\alpha) \leftrightarrow T;x(\sim\beta)$
(vii) $\eta(x) \rightarrow. T;x(\alpha \leftrightarrow \beta) \rightarrow. CT;x(\alpha) \leftrightarrow CT;x(\beta)$
(viii) $\eta(x) \rightarrow. T;x(\alpha \leftrightarrow \beta) \rightarrow. CT;x(\alpha o \gamma) \leftrightarrow CT;x(\beta o \gamma)$
(ix) $\eta(x) \rightarrow. T;x(\alpha \leftrightarrow \beta) \rightarrow. CT;x(\gamma o \alpha) \leftrightarrow CT;x(\gamma o \beta)$
(x) $\eta(x) \rightarrow. T;x(Konj/i,1,n/(\alpha;i)) \leftrightarrow Konj/i,1,n/(T;x(\alpha;i))$
(xi) $\eta(x) \rightarrow. CT;x(Disj/i,1,n/(\alpha;i)) \leftrightarrow Disj/i,1,n/(CT;x(\alpha;i))$

(xii) $\eta(x) \rightarrow .\ T;x(Konj/i,1,n/(\alpha;i)) \leftrightarrow \sim CT;x(Disj/i,1,n/(\sim\alpha;i))$
(xiii) $\eta(x) \rightarrow .\ T;x(Disj/i,1,n/(\alpha;i)) \leftrightarrow \sim CT;x(Konj/i,1,n/(\sim\alpha;i))$
(xiv) $\eta(x) \rightarrow .\ CT;x(Konj/i,1,n/(\alpha;i)) \leftrightarrow \sim T;x(Disj/i,1,n/(\sim\alpha;i))$
(xv) $\eta(x) \rightarrow .\ CT;x(Disj/i,1,n/(\alpha;i)) \leftrightarrow \sim T;x(Konj/i,1,n/(\sim\alpha;i))$
(xvi) $\eta(x) \rightarrow .\ T;x(\ Konj/i,1,n/(\alpha;i) \rightarrow \beta\&\sim\beta) \rightarrow T;x(Disj/i,1,n/(\sim\alpha;i))$

De fleste av disse satsene er av en så elementær karakter at det for noen kanskje vil fortone seg overflødig å gi detaljerte bevis. Dette kan ha noe for seg. På den annen side fortoner det seg tåpelig å la være å argumentere detaljert for de enkelte satser. Den suverene leser, som jeg forestiller meg stundom kan komme nært opp til idealet om den fullkomment logiske og rasjonelle person, kan bare hoppe over disse bevisene. Intet skulle være lettere. Det er jo dessuten ingenting som tilsier at man behøver å lese enhver linje i enhver bok med nær sagt uendelig omhu.

Bevis: *Ad (i)*. Ved hjelp av setningslogikk har man: (1) $\vdash \alpha \ \&\ (\alpha\rightarrow \beta). \rightarrow \beta$. Fra dette følger ved hjelp av regelen R2: (2) $\vdash \eta(x)\rightarrow T;x(\alpha\ \&\ (\alpha\rightarrow\beta)) \rightarrow T;x(\beta)$. A1 er den følgende påstand: (3) $\vdash \eta(x) \rightarrow (T;x(\alpha\ \&\ \beta)\leftrightarrow T;x(\alpha)\ \&\ T;x(\beta))$. Setter man her inn $\alpha\rightarrow\beta$ for β får man: (4) $\vdash \eta(x) \rightarrow (T;x(\alpha\ \&(\alpha\rightarrow\beta)\ )\leftrightarrow T;x(\alpha)\ \&\ T;x((\alpha\rightarrow\beta))$. Fra (3) og (4) følger ved hjelp av setningslogikk at $\vdash \eta(x)\rightarrow T;x(\alpha)\ \&\ T;x(\alpha\rightarrow\beta) \rightarrow T;x(\beta)$. Dette viser at (i) holder.

Ad (ii). Dette bevises ved induksjon på n. For n=1 reduseres (ii) til
$\vdash \eta(x) \rightarrow T;x(\alpha\rightarrow\beta)\ \&\ T;x(\alpha).\rightarrow T;x(\beta)$ som man åpenbart ser at holder ved hjelp av punkt (i). Anta nå at (ii) holder for n>=1. Vi skal da vise at den holder for n+1. Vi har ved hjelp av setningslogikk:

(1) $\vdash$ (Konj/i,1,n/(α;i) & α;(n+1) → β.) → (Konj/i,1,n/(α;i) → (α;(n+1) →β)). Fra dette følger ved hjelp av R2:

(2) $\vdash \eta(x) \rightarrow T;x(Konj/i,1,n/(\alpha;i)\ \&\ \alpha;(n+1) \rightarrow \beta.) \rightarrow$
$T;x(\ Konj/i,1,n/(\alpha;i) \rightarrow (\alpha;(n+1) \rightarrow\beta))$

Nå har man ved hjelp av induksjonshypotesen at

(3) $\vdash \eta(x) \rightarrow .\ T;x(Konj/i,1,n/(\alpha;i) \rightarrow \beta)\ \&\ Konj/i,1,n/(T;x(\alpha;i)).\rightarrow T;x(\beta)$

Setter man inn her $\alpha;(n+1) \rightarrow\beta$ for β får man:

(4) $\vdash \eta(x) \rightarrow .\ T;x(Konj/i,1,n/(\alpha;i) \rightarrow (\alpha;(n+1) \rightarrow\beta\ )) \rightarrow$
$Konj/i,1,n/(T;x(\alpha;i)) \rightarrow T;x(\alpha;(n+1) \rightarrow\beta)$

Videre har vi ved hjelp av det vi viste under punkt (i):

(5) $\vdash \eta(x) \rightarrow\ \ T;x(\alpha;(n+1) \rightarrow\beta) \rightarrow (T;x(\alpha;(n+1)) \rightarrow T;x(\beta))$

Fra (2), (4) og (5) kan man nå ved hjelp av setningslogikk slutte:

(6) $\vdash \eta(x) \rightarrow T;x(Konj/i,1,n/(\alpha;i)\ \&\ \alpha;(n+1) \rightarrow \beta.) \rightarrow$
$Konj/i,1,n/(T;x(\alpha;i)).\rightarrow T;x(\alpha;(n+1) \rightarrow T;x(\beta))$

Men fra dette følger ved hjelp av setningslogikk:

(7) $\vdash \eta(x) \rightarrow .\ T;x(Konj/i,1,n/(\alpha;i)\ \&\ \alpha;(n+1) \rightarrow \beta.)\ \&$
$Konj/i,1,n/(T;x(\alpha;i))\&\ T;x(\alpha;(n+1).\rightarrow T;x(\beta))$

Men i lys av definisjonen av Konj er dette ekvivalent med:

(8) $\vdash \eta(x) \rightarrow .\ T;x(Konj/i,1,n+1/(\alpha;i) \rightarrow \beta.)\ \&$
$Konj/i,1,n+1/(T;x(\alpha;i)).\rightarrow T;x(\beta))$

Dette viser at punkt (ii) holder.

Ad (iii). Ved hjelp av det vi viste under punkt (i) har man:
(1) $\vdash \eta(x)\rightarrow T;x(\alpha)\ \&\ T;x(\alpha\rightarrow\beta) \rightarrow T;x(\beta)$ og ved substitusjon i dette teorem:
(2) $\vdash \eta(x)\rightarrow T;x(\beta)\ \&\ T;x(\beta\rightarrow\alpha) \rightarrow T;x(\alpha)$. Fra (1) og (2) følger ved hjelp av setningslogikk: (3) $\eta(x)\rightarrow .(T;x(\alpha\rightarrow\beta)\ \&\ T;x(\beta\rightarrow\alpha)) \rightarrow (T;x(\alpha) \leftrightarrow T;x(\beta))$. Det følgende

er et rent setningslogiske teoremer: (6) |- (α↔β) → (α→β) og (7) (α↔β) → (β→α). Ved hjelp av R2 har vi derfor:

(8) |- η(x) → T;x(α↔β) → T;x(α→β) og

(9) |- η(x) → T;x(α↔β) → T;x(β→α)

Men fra (3), (8) og (9) følger det vi ønsker: |- η(x) →. T;x(α↔β) →. T;x(α) ↔ T;x(β). Dermed har vi gitt et bevis for at punkt (iii) holder.

Ad (iv). Hvis o er et av de setningslogiske konnektivene ser man lett ved hjelp av setningslogikk at vi har :

(1) |- α ↔ β →. αo γ → βoγ

Fra dette følger ved hjelp av R2: (2) |- η(x)→ T;x(α ↔ β) →. T;x(αo γ → βoγ). Ved substitusjon i punkt (i): (3) |- η(x) → T;x(αo γ → βoγ) → T;x(αo γ) → T;x(βoγ) Fra dette og (2) følger ved hjelp av setningslogikk:

(4) |- η(x)→ T;x(α ↔ β) →. T;x(αo γ) → T;x(βoγ)

Igjen ser man lett ved setningslogikk at man har:

(5) |- α ↔ β →. βo γ → αoγ

Fra dette følger ved hjelp av R2: (6) |- η(x)→ T;x(α ↔ β) →. T;x(βo γ → αoγ). Ved substitusjon i punkt (i): (7) |- η(x) → T;x(βo γ → αoγ) → T;x(βoγ) → T;x(αoγ) Fra dette og (6) følger ved hjelp av setningslogikk:

(8) |- η(x)→ T;x(α ↔ β) →. T;x(βo γ) → T;x(αoγ) Fra (4) og (8) følger så det vi ønsker ved hjelp av setningslogikk: (9) |- η(x)→ T;x(α ↔ β) →. T;x(βo γ) ↔ T;x(αoγ). Dette viser at punkt (iv) holder.

Ad (v). Beviset her blir helt analogt med det som er gitt i forbindelse med satsen (iv). Fullstendig gjennomført blir det slik:

Hvis o er et av de setningslogiske konnektivene ser man lett ved hjelp av setningslogikk at vi har :

(1) |- α ↔ β →. γoα → γoβ

Fra dette følger ved hjelp av R2: (2) |- η(x)→ T;x(α ↔ β) →. T;x(γoα → γoβ). Ved substitusjon i punkt (i): (3) |- η(x) → T;x(γoα → γoβ) → T;x(γoα) → T;x(γoβ) Fra dette og (2) følger ved hjelp av setningslogikk:

(4) |- η(x)→ T;x(α ↔ β) →. T;x(γoα) → T;x(γoβ)

Igjen ser man lett ved setningslogikk at man har:

(5) |- α ↔ β →. γoβ → γoα

Fra dette følger ved hjelp av R2: (6) |- η(x)→ T;x(α ↔ β) →. T;x(γoβ → γoα). Ved substitusjon i punkt (i): (7) |- η(x) → T;x(γoβ → γoα) → T;x(γoβ) → T;x(γoα) Fra dette og (6) følger ved hjelp av setningslogikk:

(8) |- η(x)→ T;x(α ↔ β) →. T;x(γoβ) → T;x(γoα) Fra (4) og (8) følger så det vi ønsker ved hjelp av setningslogikk: (9) |- η(x)→ T;x(α ↔ β) →. T;x(γoβ) ↔ T;x(γoα). Dette viser at punkt (v) holder.

Ad (vi). Ved substitusjon i det vi viste under punkt (i) har man:

(1) |- η(x)→ T;x(~β) & T;x(~β→~α) → T;x(~α)

(2) |- η(x)→ T;x(~α) & T;x(~α→~β) → T;x(~β).

Fra (1) og (2) følger ved hjelp av setningslogikk:

(3) η(x)→ .(T;x(~α→~β) & T;x(~β→~α)) → (T;x(~α) ↔ T;x(~β)). Det følgende er et rent setningslogiske teoremer: (6) |- (α↔β) → (~α→~β) og (7) (α↔β) → (~β→ ~α). Ved hjelp av R2 har vi derfor:

(8) |- η(x) → T;x(α↔β) → T;x(~α→~β) og

(9) |- η(x) → T;x(α↔β) → T;x(~β→~α)

Men fra (3), (8) og (9) følger det vi ønsker: |- η(x) →. T;x(α↔β) →. T;x(~α) ↔ T;x(~β). Dermed har vi gitt et bevis for at punkt (vi) holder.

Ad (vii). Punkt (vi) innebærer at (1) |- η(x) →. T;x(α↔β) →. T;x(~α) ↔ T;x(~β). Fra dette følger ved hjelp av ren setningslogikk:

(2) |- η(x) →. T;x(α↔β) →. ~T;x(~α) ↔ ~T;x(~β)

Men i lys av definisjonen CT er dette ekvivalent med

(3) |- η(x) →. T;x(α↔β) →. CT;x(α) ↔ CT;x(β) Dette viser at punkt (vii) holder.

Ad (viii). Vi har ikraft av setningslogikk:

(1) |- α↔β → ((αoγ) ↔ (βoγ))

Fra dette følger ved hjelp av R2:

(2) |- η(x) → T;x(α↔β) → T;x((αoγ) ↔ (βoγ))

Ved substitusjon i punkt (vi) har vi:

(3) |- η(x) →. T;x(αoγ↔βoγ) →. T;x(~(αoγ)) ↔ T;x(~(βoγ)). Fra (2) og (3) har vi ren setningslogikk: (4) |- η(x) → T;x(α ↔ β) → T;x(~(αoγ)) ↔ T;x(~(βoγ)). Fra dette følger så igjen ved hjelp av setningslogikk:

(5) |- η(x) → T;x(α ↔ β) → ~T;x(~(αoγ)) ↔ ~T;x(~(βoγ)). Men herav følger ved hjelp av definisjonen av CT det vi ønsker, nemlig:

(6) η(x) →. T;x(α ↔ β) → (CT;x(αoγ) ↔ CT;x(βoγ))

Dette viser at punkt (viii) holder.

Ad (ix). Vi har ikraft av setningslogikk:

(1) |- α↔β → ((γoα) ↔ (γoβ))

Fra dette følger ved hjelp av R2:

(2) |- η(x) → T;x(α↔β) → T;x((γoα) ↔ (γoβ))

Ved substitusjon i punkt (vi) har vi:

(3) |- η(x) →. T;x(γoα↔γoβ) →. T;x(~(γoα)) ↔ T;x(~(γoβ)). Fra (2) og (3) har vi ren setningslogikk: (4) |- η(x) → T;x(α ↔ β) → T;x(~(γoα)) ↔ T;x(~(γoβ)). Fra dette følger så igjen ved hjelp av setningslogikk:

(5) |- η(x) → T;x(α ↔ β) → ~T;x(~(γoα)) ↔ ~T;x(~(γoβ)). Men herav følger ved hjelp av definisjonen av CT det vi ønsker, nemlig:

(6) η(x) →. T;x(α ↔ β) → (CT;x(γoα) ↔ CT;x(γoβ))

Dette viser at punkt (ix) holder.

Ad (x). Denne satsen bevises ved induksjon. Basistrinn: Vi har åpenbart at satsen holder for n=1 for da har vi Konj/i,1,n/(T;x(α;i)) = T;x(α;1) og Konj/i,1,n/(T;x(α;i)) = T;x(α;1). I dette tilfelle sier ikke satsen noe mer enn at |- η(x) → T;x(α;1) ↔ T;x(α;1). Noe som åpenbart holder.

Induksjonstrinn. Anta som induksjonshypotese at

(2) |- η(x) →. T;x(Konj/i,1,n/(α;i)) ↔ Konj/i,1,n/(T;x(α;i)) Ved substitusjon i A1 har vi

(3) |- η(x) → T;x(Konj/i,1,n/(α;i) & α;(n+1)) ↔ T;x(Konj/i,1,n/(α;i)) & T;x(α;(n+1)). Fra dette og (2) følger ved hjelp av ren setningslogikk:

(4) |- η(x) → T;x(Konj/i,1,n/(α;i) & α;(n+1)) ↔ Konj/i,1,n/(T;x(α;i)) & T;x(α;(n+1))

Men i lys av definisjonen av Konj følger fra (4):

(5) |- η(x) →. T;x(Konj/i,1,n+1/(α;i)) ↔ Konj/i,1,n+1/(T;x(α;i))

Dette viser at punkt (x) holder.

Ad (xi). Vi har tidligere bevist at det følgende skjema er et teorem i Kη-:

(1) $\eta(x) \rightarrow CT;x(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow CT;x(\alpha) \vee CT;x(\beta)$

Punkt (xi) bevises også ved induksjon. Basistrinn: Vi har åpenbart at satsen holder for n=1 for da har vi $Disj/i,1,n/(CT;x(\alpha;i)) = CT;x(\alpha;1)$ og $Disj/i,1,n/(CT;x(\alpha;i)) = CT;x(\alpha;1)$. I dette tilfelle sier ikke satsen noe mer enn at $\vdash \eta(x) \rightarrow CT;x(\alpha;1) \leftrightarrow_C T;x(\alpha;1)$. Noe som åpenbart holder.

Induksjonstrinn. Anta som induksjonshypotese at

(2) $\vdash \eta(x) \rightarrow. CT;x(Disj/i,1,n/(\alpha;i)) \leftrightarrow Disj/i,1,n/(CT;x(\alpha;i))$ Ved substitusjon i (1) ovenfor har vi

(3) $\vdash \eta(x) \rightarrow CT;x(Disj/i,1,n/(\alpha;i) \vee \alpha;(n+1)) \leftrightarrow CT;x(Disj/i,1,n/(\alpha;i)) \,\&\, CT;x(\alpha;(n+1))$. Fra dette og (2) følger ved hjelp av ren setningslogikk:

(4) $\vdash \eta(x) \rightarrow CT;x(Disj/i,1,n/(\alpha;i) \vee \alpha;(n+1)) \leftrightarrow Disj/i,1,n/(CT;x(\alpha;i)) \vee CT;x(\alpha;(n+1))$

Men i lys av definisjonen av Disj følger fra (4):

(5) $\vdash \eta(x) \rightarrow. CT;x(Disj/i,1,n+1/(\alpha;i)) \leftrightarrow Disj/i,1,n+1/(CT;x(\alpha;i))$

Dette viser at punkt (xi) holder.

Ad (xii) Vi har som et rent setningslogisk teorem:

(1) $\vdash Konj/i,1,n/(\alpha;i) \leftrightarrow \sim Disj/i,1,n/(\sim\alpha;i)$.

Fra denne sats følger ved hjelp av R3, som vi allerede har bevist at er en slutningsregel som kan utledes i Kη- , at :

(2) $\vdash \eta(x) \rightarrow T;x(Konj/i,1,n/(\alpha;i)) \leftrightarrow T;x(\sim Disj/i,1,n/(\sim\alpha;i))$. Fra dette har vi i sin tur ved hjelp av setningslogikk: (3) $\vdash \eta(x) \rightarrow T;x(Konj/i,1,n/(\alpha;i)) \leftrightarrow \sim\sim T;x(\sim Disj/i,1,n/(\sim\alpha;i))$.

Men i lys av definisjonen av CT impliserer dette siste det vi ønsker, nemlig

$\vdash \eta(x) \rightarrow. T;x(Konj/i,1,n/(\alpha;i)) \leftrightarrow \sim CT;x(Disj/i,1,n/(\sim\alpha;i))$. Dette viser at punkt (xii) holder.

Ad (xiii) Vi har som et rent setningslogisk teorem:

(1) $\vdash Disj/i,1,n/(\alpha;i) \leftrightarrow \sim Konj/i,1,n/(\sim\alpha;i)$.

Fra denne sats følger ved hjelp av R3, som vi allerede har bevist at er en slutningsregel som kan utledes i Kη- at :

(2) $\vdash \eta(x) \rightarrow T;x(Disj/i,1,n/(\alpha;i)) \leftrightarrow T;x(\sim Konj/i,1,n/(\sim\alpha;i))$. Fra dette har vi i sin tur ved hjelp av setningslogikk: (3) $\vdash \eta(x) \rightarrow T;x(Disj/i,1,n/(\alpha;i)) \leftrightarrow \sim\sim T;x(\sim Konj/i,1,n/(\sim\alpha;i))$.

Men i lys av definisjonen av CT impliserer dette siste det vi ønsker, nemlig

$\vdash \eta(x) \rightarrow. T;x(Disj/i,1,n/(\alpha;i)) \leftrightarrow \sim CT;x(Konj/i,1,n/(\sim\alpha;i))$. Dette viser at punkt (xiii) holder.

Ad(xiv). Vi har som et rent setningslogisk teorem:

(1) $\vdash Disj/i,1,n/(\sim\alpha;i) \leftrightarrow \sim Konj/i,1,n/(\alpha;i)$.

Fra denne sats følger ved hjelp av R3, som vi allerede har bevist at er en slutningsregel som kan utledes i Kη- at :

(2) $\vdash \eta(x) \rightarrow T;x(Disj/i,1,n/(\sim\alpha;i)) \leftrightarrow T;x(\sim Konj/i,1,n/(\alpha;i))$. Fra dette har vi i sin tur ved hjelp av setningslogikk: (3) $\vdash \eta(x) \rightarrow \sim T;x(Disj/i,1,n/(\sim\alpha;i)) \leftrightarrow \sim T;x(\sim Konj/i,1,n/(\alpha;i))$.

Men i lys av definisjonen av CT impliserer dette siste det vi ønsker, nemlig

$\vdash \eta(x) \rightarrow. CT;x(Konj/i,1,n/(\alpha;i)) \leftrightarrow \sim T;x(Disj/i,1,n/(\sim\alpha;i))$. Dette viser at punkt (xiii) holder.

Ad (xv). Vi har som et rent setningslogisk teorem:

(1) $\vdash \sim Disj/i,1,n/(\alpha;i) \leftrightarrow Konj/i,1,n/(\sim\alpha;i)$.

Fra denne sats følger ved hjelp av R3, som vi allerede har bevist at er en slutningsregel som kan utledes i Kη- at :

(2) $\vdash \eta(x) \rightarrow T;x(\sim Disj/i,1,n/(\alpha;i)) \leftrightarrow T;x(Konj/i,1,n/(\sim\alpha;i))$. Fra dette har vi i sin tur ved hjelp av setningslogikk: (3) $\vdash \eta(x) \rightarrow \sim T;x(\sim Disj/i,1,n/(\alpha;i)) \leftrightarrow \sim T;x(Konj/i,1,n/(\sim\alpha;i))$.

Men i lys av definisjonen av CT impliserer dette siste det vi ønsker, nemlig

$\vdash \eta(x) \rightarrow. CT;x(Disj/i,1,n/(\alpha;i)) \leftrightarrow \sim T;x(Konj/i,1,n/(\sim\alpha;i))$. Dette viser at punkt (xv) holder.

Ad (xvi). Vi har som et rent setningslogisk teorem:
(1) |- (Konj/i,1,n/(α;i) → β&~β) → Disj/i,1,n/(~α;i) Men fra dette følger ved hjelp av R2 det vi ønsker, nemlig: |- η(x) →. T;x(Konj/i,1,n/(α;i) → β&~β) → T;x(Disj/i,1,n/(~α;i)). Dette viser at også punkt (xvi) holder.

Vi har nå gitt bevis for alle punkter i teoremet. **QED.**

Teorem (Elementærteorem 3).
De følgende satser kan utledes i Kη

(i) η(x) →. T;x(α) → CT,x(α)
(ii) η(x) →. T;x(α→β) → CT;x(α)→ CT;x(β)
(iii) η(x) →. T;x(αvβ) & T;x(~α) → T;x(β)
(iv) η(x) →. T;x(αvβ) & CT;x(~β) → CT;x(α)
(v) η(x) →. T;x(α→β) → T;x(~β) → T;x(~α)
(vi) η(x) →. T;x(α→β) → ~CT;x(β) → ~CT;x(α)
(vii) η(x) →. CT;x(α&β) → CT;x(α) & CT;x(β)
(viii) η(x) →. T;x(α v β) → T;x(β) v CT;x(α)
(ix) η(x) →. CT;x(~β) & T;x(~α) → CT;x((~α) & (~β))
(x) η(x) →. CT;x(β) & T;x(α) → CT;x(α & β)
(xi) η(x) →. T;x(α) → CT;x(β) → CT;x(α&β)
(xii) η(x) →. CT;x(~β) → ~T;x(α& β)
(xiii) |- α→ β → |- η(x) →. CT;x(α) → CT;x(β)
(xiv) |- α↔ β → |- η(x) →. CT;x(α) ↔ CT;x(β)

Bevis: *Ad (i)*: A1 sier at (1) |-η(x) → ~T;x(α & ~α). Ved substitusjon i A2 har man: (2) |- η(x) →. T;x(α & ~α) ↔ T;x(α)&T;x(~α). Fra (1) og (2) følger ved hjelp av setningslogikk: (3) |- η(x)→. T;x(α) → ~T;x(~α). Men fra dette og definisjonen av CT følger punkt (i) i satsen.

Ad (ii): Fra punkt (i) i Elementærteorem 2 har man ved substitusjon :
(1) |- η(x)→. T;x(~β→~α) → T;x(~β)→T;x(~α). Fra dette følger ved hjelp av setningslogikk: (2) |- η(x)→. T;x(~β→~α) → ~T;x(~α)→~T;x(~β). På basis av ren setningslogikk har man videre: (3) |- (α→β) → (~β → ~α). Fra (3) kan man ved hjelp av R2 slutte: (4) |- η(x) → T;x(α→β) → T;x(~β → ~α). Fra (2) og (4) følger:
(5) |- η(x)→. T;x(α→β) → ~T;x(~α)→~T;x(~β). Fra dette og definisjonen av CT har man så: (6) |- η(x) →. T;x(α→β) → CT;x(α)→ CT;x(β). Dette viser at punkt (ii) holder.

Ad (iii): Ved hjelp av setningslogikk har man: (1) |- (αvβ) → ((~α)→β). Ved substitusjon i punkt (i) i Elementærteorem 2 og setningslogikk følger:
(2) |- η(x) → T;x(~α→ β) & T;x(~α) → T;x(β). Fra (1) følger ved hjelp av R2:
(3)|- η(x) → T;x(αvβ) → T;x((~α)→β). Fra (3) og (2) har man så, atter ved hjelp av setningslogikk: (4) |- η(x) →. T;x(αvβ) & T;x(~α) → T;x(β). Dette viser at punkt (iii) holder.

Ad (iv): Fra punkt (iii) har vi ved hjelp av setningslogikk:
(1) |- η(x) →. T;x(αvβ) & ~T;x(β) → ~T;x(~α). Nå har man |- β ↔ ~~β. Ved hjelp av R3 har man da: (2) η(x) →. T;x(β) ↔ T;x(~~β). Fra dette og (1) følger:
(3) |- η(x) →. T;x(αvβ) & ~T;x(~~β) → ~T;x(~α). Men ved hjelp av definisjonen av CT har man fra dette: (4) η(x) →. T;x(αvβ) & CT;x(~β) → CT;x(α). Dette viser at punkt (iv) holder.

Ad (v): Ved substitusjon i punkt (i) Elementærteorem 2 og setningslogikk har man:
(1) |- η(x) →. T;x(~β → ~α) → T;x(~β) → T;x(~α). Nå har vi rent setningslogisk:
(2) |- (α→β) → (~β→ ~α). Ved hjelp av R2 følger fra (2):
(3) |- η(x) →. T;x(α→β) → T;x(~β→ ~α). Fra dette og (1) følger så ved hjelp av ren setningslogikk det vi ønsker: (4) |- η(x) →. T;x(α→β) → T;x(~β) → T;x(~α). Dette viser at punk (v) holder.

Ad (vi): Fra punkt (v) som vi nå har bevist følger ved hjelp av ren setningslogikk:
(1) |- η(x) →. T;x(α→β) → ~~T;x(~β) → ~~T;x(~α). Fra dette og definisjonen av CT følger så det vi ønsker: (2) |- η(x) →. T;x(α→β) → ~CT;x(β) → ~CT;x(α).

Ad (vii): Ved hjelp av setningslogikk har man (1) |- ~α → ~(α&β) Tilsvarende har man
(2) |- ~β → ~(α&β). Ved hjelp av R2 følger fra (1) og (2):
(3) |- η(x) → T;x(~α) → T;x(~(α&β)) og
(4) |- η(x) → T;x(~β) → T;x(~(α&β))
Herav har man så ved hjelp av ren setningslogikk:
(5) |- η(x) → ~T;x(~(α&β))→~T;x(~α)
(6) |- η(x) → ~T;x(~(α&β))→~T;x(~β)
Men fra (5), (6) og definisjonen av CT følger det vi ønsker, nemlig:
(7) |- η(x) →. CT;x(α&β) → CT;x(α) & CT;x(β). Dette viser at punkt (vii) holder.

Ad (viii): Vi har ved subsitusjon i punkt (i) i Elementærteorem 2 at:
(1) |- η(x)→. T;x(~α→β)→ T;x(~α) → T;x(β). Fra dette følger ved hjelp av ren setningslogikk: (2) |- η(x)→. T;x(~α→β)→ T;x(β)v ~T;x(~α). Men vi har naturligvis:
|- αvβ →. (~α) → β . Ved hjelp av R2 følger herav: (3) |- η(x) →T;x(αvβ) →.T;x((~α) → β)
Fra (29, (3) og definisjonen følger det vi ønsker: |- η(x) →. T;x(α v β) → T;x(β) v CT;x(α).
Dette viser at punkt (viii) holder.

Ad (ix): Ved hjelp av setningslogikk følger fra punkt (viii):
(1) η(x) →. ~T;x(β) & ~CT;x(α) → ~T;x(α v β) Nå har man vet setningslogikk:
(2) |- (αvβ) ↔ ~(~α & ~β). Ved hjelp av R3 følger herav: |- η(x) →. T;x(αvβ) ↔ T;x(~(~α & ~β)). Fra (1) og (2) følger: (3) |- η(x) →. ~T;x(β) & ~CT;x(α) → ~ T;x(~(~α & ~β)).
Fra dette og definisjonen av CT følger : (4) |- η(x) →. ~T;x(β) & T;x(~α) → CT;x(~α & ~β)). Siden |- β↔ ~~β har vi ved hjelp av R3 (5) |- η(x) → T;x(β) ↔ T;x(~~β). Fra (4) og (5) følger ved hjelp av setningslogikk: (6)) |- η(x) →. ~T;x(~~β) & T;x(~α) → CT;x(~α & ~β)). Fra dette følger så ved hjelp av setningslogikk og definisjonen av CT: η(x) →. CT;x(~β) & T;x(~α) → CT;x((~α) & (~β)). Dette viser at punkt (ix) holder.

Før vi går videre beviser vi punkt (xiii) og (xiv):

Ad (xiii): Anta (1) |- α→β. Da har vi ved hjelp av setningslogikk: (2) |- (~β)→ (~α). Herav følger så ved hjelp av R1: (3) |- η(x) → T;x(~β) → T;x(~α). Fra dette følger så ved setningslogikk: (4) |- η(x) → ~T;x(~α) → ~T;x(~β). Fra dette følger det vi ønsker ved hjelp definisjonen av CT: |- η(x) →. CT;x(α) → CT;x(β). Dette viser at (xiii) holder.

Ad (xiv): Anta (1) |- α↔ β. Da har vi (2) |- α→β og (3) |- β→α. Ved hjelp av punkt (xiii) følger fra dette: (4) |- η(x) →. CT;x(α) → CT;x(β) og (5) |- η(x) →. CT;x(β) → CT;x(α).
Fra (4) og (5) følger det vi ønsker: (6) |- η(x) →. CT;x(α) ↔ CT;x(β).

Ad (x): Ved substitusjon av ~α for α og ~β for β i (ix) får vi:

(1) η(x) →. CT;x(~~β) & T;x(~~α) → CT;x((~~α) & (~~β)) Nå har man ved hjelp av setningslogikk: |- α ↔ ~~α. Fra dette og R3 følger: (2) |- η(x) → T;x(~~α) ↔ T;x(α). Videre har man |- β ↔ ~~β. Fra dette følger ved hjelp av punkt (xiv):
(3) |- η(x) → CT;x(β) ↔ CT;x(~~β). Endelig har man |- ((~~α) & (~~β)) ↔ (α&β). Herav har man så ved hjelp av punkt (xiv): (4) |- η(x)→. CT;x((~~α) & (~~β)) ↔ CT;x(α&β). Fra (1) -(4) har man så ved setningslogikk det vi ønsker:

|- η(x) →. CT;x(β) & T;x(α) → CT;x(α & β). Dette viser at (x) holder.

Ad (xi): Dette følger umiddelbart fra punkt (x) ved hjelp av setningslogikk.

Ad (xii): Siden |- α&β → ~~β har man ved hjelp av R1: |- η(x) →. T;x(α&β) →T;x(~~β). Herav har man ved setningslogikk: |- η(x) → ~T;x(~~β) → ~T;x(α&β). Fra dette følger så det vi ønsker ved hjelp av definisjonen av CT: |- η(x) →. CT,x(~β) → ~T;x(α&β).
Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for alle punkter i teoremet. **QED.**

§5 Iterasjon av konstruksjonen T;x(α) Iterasjonsteoremer

Ikke i noen av de satsene vi så langt har bevist har iterasjon av operatoren T;x, og den duale operatoren CT;x, spilt noen som helst rolle. Vi skal imidlertid nå gi bevis for en del satser hvor disse operatorene forekommer iterert. Først definerer vi den n'te iterasjonen av T;x(α), som vi betegner med T(n);x(α), for n>= 1 ved den følgende definisjon:

Definisjon: (i) T(1);x(α) = T;x(α)
(ii) T(n+1);x = T;x(T(n);x(α))

På tilsvarende vis defineres den n'te iterasjonen av CT;x(α), som vi betegner med CT(n);x(α), ved den følgende definisjon:

Definisjon: (i) CT(1);x(α) = CT;x(α)
(ii) CT(n+1);x = CT;x(CT(n);x(α))

Man ser at T(2);x(α) = T;x(T;x(α)) og at T(3);x(α) = T;x(T;x(T;x(α))) osv. Uttrykket "T(2);x(α)" kan leses "x tror at han tror at α", uttrykket " T(3);x(α)" kan leses " x tror at han tror at han tror at α". Hvis den doxastiske operatoren T;x forekommer iterert et stort antall ganger i en setning kan det naturligvis være vanskelig å formulere setningen på en stilistisk elegant og velartikulert måte. I det følgende skal vi bruke følgende lesemåte av konstruksjonen "T(n);x(α)", nemlig "x tror på nivå n at α er tilfelle". Mengden av alle de utsagn α som x tror på nivå n, skal vi dessuten kalle for trosfeltet til x på nivå n. Trosfeltet til x på nivå 2 vil følgelig være mengden av alle de utsagn som x tror at x tror er tilfelle.

Tilsvarende når det gjelder konstruksjonen "CT(n);x(α)". Vi foreslår følgende lesemåte i forbindelse med denne operatoren "Det at α er logisk sett forenelig med alt det x tror på nivå n". Vi skal også bruke den følgende lesemåte når det ikke er noen risiko for misforståelser: "Det at α er forenelig med alt det x tror på nivå n".

Som man skjønner er trosfeltet til x på nivå 1 det samme som trosfeltet til x.

I svært mange av de satsene vi har nevnt har antesedenten vært en setning av typen "η(x)". Det kan bemerkes at vi ikke i Kη alene kan bevise noen ubetingede satser av typen T;x(α), eller typen T;x(α) → T;x(β). Ingen setninger av denne typen uansett hva man setter

inn av formler for α og β er teoremer. Teoremer i Kη er alltid av typen η(x)→α eller en beslektet type.

Vi innfører d;n(x) for n>=0 ved den følgende definisjon.

Definisjon:

(i) d;0(x) = η(x)

(ii) d;n+1(x) = d;n(x)& T(n+1);x(d;n(x))

Man ser fra denne definisjonen at d;0(x) = η(x). d;0(x) innebærer følgelig at x er en fulkomment logisk rasjonell person, dvs. en person med et rasjonelt organisert trosfelt.. d;1(x), som man ser fra definisjonen, er ekvivalent med η(x) & T;x(η(x)). Denne betingelsen innebærer derfor at x ikke bare er en logisk rasjonell person, men det er også slik at x tror at han er en logisk rasjonell person. Studerer man ytterligere definisjonen oppdager man raskt at d;2(x) er ekvivalent med den følgende betingelse: η(x) & T;x(η(x)) & T;x(η(x) & T;x(η(x))). Vi skal straks vise at denne siste betingelsen er ekvivalent med η(x) & T;x(η(x)) & T;x(T;x(η(x))). Man ser altså at d;2(x) innebærer, ikke bare at x er en fullkomment logisk rasjonell person og tror at han er en slik person, men det innebærer enn mer at x tror at han tror at han er en fullkomment rasjonell person.

Det kan være hensiktsmessig å innføre en egen lesemåte for uttrykket "d;n(x)". Vi foreslår her at man leser det "trosfeltet til x er rasjonelt organisert på alle nivåer opp til og inkludert nivå n+1".

Den følgende sats blir brukt flittig i beviset for en del av de teoremer vi skal bevise:

Lemma: For alle n>=0 gjelder:

(Kη-) |- η(x) & T;x(d;n(x)) ↔ d;(n+1)(x)

Bevis: Satsen bevises ved induksjon på n.

Basistrinn: Vi viser først at den holder for n=0. Da har man ikraft av definisjonen av d at d;0(x) = η(x). Vi har derfor (1) |- η(x)& T;x(d;0(x)) ↔ η(x) & T;x(η(x)). På den annen side har vi (2) d;(0+1)(x) = d;0(x)& T(0+1);x(d;0(x)) = η(x) & T;x(η(x)). Det følger fra (1) og (2) at vi har: (3) |- η(x) & T;x(d;0(x)) ↔ d;(0+1)(x). Påstanden holder altså for n=0.

Induksjonstrinn: Vi antar at satsen holder for n, dvs:
(4) |- η(x) & T;x(d;n(x)) ↔ d;(n+1)(x) og skal vise at den holder for n+1. Ved hjelp av definisjonen av d ser man at man har:

(5) |- η(x) & T;x(d;(n+1)(x)) ↔ η(x) & T;x(d;n(x) & T(n+1);x(d;n(x)))

Siden A1 er et aksiom har vi (6) |- η(x) → T;x(α&β) ↔ T;x(α)&T;x(β). Setter man her inn d;n(x) for α og T(n+1);x(d;n(x))) for β ser man at vi får:
(7) η(x) →. T;x[d;n(x)& T(n+1);x(d;n(x))] ↔ T;x(d;n(x))&T;x(T(n+1);x(d;n(x))).
Fra (5) og (7) følger ved hjelp av setningslogikk:
(8) |- η(x) & T;x(d;(n+1)(x)) ↔ η(x) & T;x(d;n(x))&T;x(T(n+1);x(d;n(x))) Fra dette, induksjonshypotesen, dvs. (4), og definisjonen av T(n) følger ved setningslogikk:
(9) |- η(x) & T;x(d;(n+1)(x)) ↔ d;(n+1)& T(n+2);x(d;n(x)) Men fra definisjonen av d har vi: (10) |- d;(n+2) ↔ d;(n+1)& T(n+2);x(d;n(x)) . Fra (9) og (10) følger så ved setningslogikk det vi ønsker, nemlig: | - η(x) & T;x(d;(n+1)(x)) ↔ d;(n+2)(x). Dette viser at dersom satsen holder for n holder den også for n+1. Dermed er teoremet bevist. **QED.**
Man ser at vi i beviset ovenfor ikke har brukt noe annet enn definisjonene, setningslogikk og aksiomet A1. Formelen η(x) & T;x(d;n(x)) ↔ d;(n+1)(x) kan derfor utledes i systemet Kη-.

Vi tar nå for oss den første satsen om iterasjon:

Teorem: (Iterasjonsteorem 1) Dersom n>=0 holder de følgende tre påstander i Kη-:

(i) $\vdash \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \vdash d;n(x) \rightarrow . T(n+1);x(\alpha) \rightarrow T(n+1);x(\beta)$

(ii) $\vdash d;n(x) \rightarrow . T(n+1);x(\alpha\&\beta) \leftrightarrow T(n+1);x(\alpha) \& T(n+1);(\beta)$

(iii) $\vdash \alpha \leftrightarrow \beta \rightarrow \vdash d;n(x) \rightarrow . T(n+1);x(\alpha) \leftrightarrow T(n+1);x(\beta)$

Man ser at punkt (i) i teoremet har en betraktelig likhet med slutningsregelen R2. Vi skal derfor betegne denne regelen med R2(n). Videre iaktar man likhetstrekkene mellom (ii) og A1. Av denne grunn skal vi betegne formelen i (ii) med A1(n). Endelig ser man at (iii) er en slutningsregel som er helt analog med slutningsregelen R3. Den kan oppfattes som en generalisering av R3. Vi betegner den derfor med R3(n).

Bevis: *Ad (i)*. Denne påstanden bevises ved induksjon på n.

Basistrinn: Er n=0 har man at $d;n(x) = d;0(x) = \eta(x)$, videre at $T(n+1);x(\alpha) = T;x(\alpha)$ og $T(n+1);x(\beta) = T;x(\beta)$. I dette tilfellet er regelen fullstendig identisk med regelen R2.

Induksjonstrinn: Vi skal vise at dersom regelen holder for n holder den også for n+1. Vi antar derfor som induksjonshypotese:

(1) $\vdash \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \vdash d;n(x) \rightarrow . T(n+1);x(\alpha) \rightarrow T(n+1);x(\beta)$

Anta nå (2) $\vdash \alpha \rightarrow \beta$. Da har man ved hjelp av (1) at

(3) $\vdash d;n(x) \rightarrow . T(n+1);x(\alpha) \rightarrow T(n+1);x(\beta)$. Fra dette kan vi ved hjelp av R2 slutte:

(4) $\vdash \eta(x) \rightarrow .T;x(d;n(x)) \rightarrow T;x(T(n+1);x(\alpha) \rightarrow T(n+1);x(\beta))$. Nå sier det første punktet i elementær teorem 2 at (5) $\vdash \eta(x) \rightarrow .T;x(\alpha) \& T;x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow T;x(\beta)$. Setter man her inn $T(n+1);x(\alpha)$ for α og $T(n+1);x(\beta)$ for β får man:

(6) $\vdash \eta(x) \rightarrow . T;x(T(n+1);x(\alpha) \rightarrow T(n+1);x(\beta)). \rightarrow T;x(T(n+1);x(\alpha)) \rightarrow T;x(T(n+1);x(\beta))$.

Fra dette og (4) følger så ved hjelp av ren setningslogikk:

(7) $\vdash \eta(x) \& T;x(d;n(x)) \rightarrow T;x(T(n+1);x(\alpha)) \rightarrow T;x(T(n+1);x(\beta))$

Ved hjelp av lemmaet som ble vist ovenfor, (7) ren setningslogikk og definisjonen av T(n) har man så det vi ønsker: (8) $\vdash d;n(x) \rightarrow . T(n+2);x(\alpha) \rightarrow T(n+2);x(\beta)$. Dette viser at (i) holder.

Ad (ii). Dette bevises også ved induksjon.

Basistrinn: Er n=0 har man at $d;n(x) = d;0(x) = \eta(x)$ og at $T(n+1);x(\alpha) = T;x(\alpha)$ og $T(n+1);x(\beta) = T;x(\beta)$. Dessuten har man at $T(n+1);x(\alpha\&\beta) = T;x(\alpha\&\beta)$. Satsen reduseres i dette tilfelle til A1 nemlig $\vdash \eta(x) \rightarrow . T;x(\alpha\&\beta) \leftrightarrow T;x(\alpha) \& T;x(\beta)$ som åpenbart er et teorem i Kη-.

Induksjonstrinn: Vi skal vise at dersom (ii) holder for n holder påstanden også for n+1. Vi antar derfor som induksjonshypotese:

(1) $\vdash d;n(x) \rightarrow . T(n+1);x(\alpha\&\beta) \leftrightarrow T(n+1);x(\alpha) \& T(n+1);(\beta)$

Fra dette følger ved hjelp av setningslogikk:

(2) $\vdash d;n(x) \rightarrow . T(n+1);x(\alpha\&\beta) \rightarrow T(n+1);x(\alpha) \& T(n+1);(\beta)$ og

(3) $\vdash d;n(x) \rightarrow . T(n+1);x(\alpha) \& T(n+1);x(\beta) \rightarrow T(n+1);x(\alpha\&\beta)$ Fra (2) har vi ved hjelp av R2:

(4) $\vdash \eta(x) \rightarrow T;x(d;n(x)) \rightarrow T;x(T(n+1);x(\alpha\&\beta). \rightarrow T(n+1);x(\alpha) \& T(n+1);(\beta))$

Ved hjelp av det første punktet i elementærteorem 2 har vi:

(5) $\eta(x) \rightarrow T;x[T(n+1);x(\alpha\&\beta). \rightarrow T(n+1);x(\alpha) \& T(n+1);x(\beta)] \rightarrow .$
$T;x(T(n+1);x(\alpha\&\beta) \rightarrow T;x(T(n+1);x(\alpha) \& T(n+1);x(\beta))$

Fra dette og (4) følger ved hjelp av ren setningslogikk:

(6) $\vdash \eta(x) \& T;x(d;n(x)) \rightarrow T;x(T(n+1);x(\alpha\&\beta)). \rightarrow T;x(T(n+1);x(\alpha) \& T(n+1);(\beta))$

Ved hjelp av A1 har vi

(7) $\eta(x) \rightarrow . T;x(T(n+1);x(\alpha) \& T(n+1);(\beta)) \leftrightarrow T;x(T(n+1);x(\alpha)) \& T;x(T(n+1);(\beta))$

Fra (6) og (7) følger ved hjelp av setningslogikk:

(8) |- η(x) & T;x(d;n(x)) →. T;x(T(n+1);x(α&β)). → T;x(T(n+1);x(α) & T;x(T(n+1);(β))
Ved hjelp av definisjonen av d og T(n) har vi fra (8):
(9) |- d;(n+1)(x) →. T(n+2);x(α&β) → (T(n+2);x(α) & T(n+2);x(β)).

Fra (3) har vi ved hjelp av R2:
(10) |- η(x) → T;x(d;n(x)) → T;x[T(n+1);x(α) & T(n+1);x(β)→T(n+1);x(α&β)]
Ved hjelp av det første punktet i elementærteorem 2 har vi:
(11) η(x) → T;x[T(n+1);x(α) & T(n+1);(β)→T(n+1);x(α&β)]. →
T;x(T(n+1);x(α) & T(n+1);(β))→T;x(T(n+1);x(α&β)).
Fra dette og (10) følger ved hjelp av ren setningslogikk:
(12) |- η(x) & T;x(d;n(x)) → T;x(T(n+1);x(α) & T(n+1);(β))→T;x(T(n+1);x(α&β)).
Ved hjelp av A1 har vi
(13) η(x) → . T;x(T(n+1);x(α) & T(n+1);(β)) ↔ T;x(T(n+1);x(α)) & T;x(T(n+1);(β))
Fra (12) og (13) følger ved hjelp av setningslogikk:
(14) |- η(x) & T;x(d;n(x)) →. T;x(T(n+1);x(α) & T;x(T(n+1);(β))→T;x(T(n+1);x(α&β)).
Ved hjelp av definisjonen av d og T(n) har vi fra (14):
(15) |- d;(n+1)(x) →. (T(n+2);x(α) & T(n+2);x(β))→T(n+2);x(α&β).
Ved hjelp av (9) og (15) følger så det vi ønsker, nemlig:
(16) |- d;(n+1)(x) →. T(n+2);x(α&β) ↔ T(n+2);x(α) & T(n+2);(β). Dette viser at punkt (ii) holder.

Ad (iii) Anta (1) |- α ↔ β. Da har vi (2) |- α → β og (3) |- β→ α. Fra (2) og det som ble vist under punkt (i) følger: (4) d;n(x) →. T(n+1);x(α) → T(n+1);x(β). Likeledes følger fra (3) og punkt (i), man bytter bare om β og α , (5) d;n(x) →. T(n+1);x(β) → T(n+1);x(α). Fra (4) og (5) følger så umiddelbart det vi ønsker ved hjelp av setningslogikk:
|- d;n(x) →. T(n+1);x(α) ↔ T(n+1);x(β). Dette viser at (iii) holder.
Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED.**

Noen bemerkninger bør innskytes i forbindelse med satsen som vi har bevist ovenfor. Man ser som nevnt at A1(n) og R2(n) er helt analoge med A1 og R2. I beviset for Elementærteorem 2 benyttet vi bare A1 og R2. Alle bevisene kan derfor gjennomføres ved at man istedet for A1 bruker A1(n) og istedet for R2 bruker R2(n). Dette innebærer at Elementærteorem 2 fortsatt holder om vi istedet for "η(x)" overalt setter inn "d;n(x)" , setter inn "T(n+1);x(α)" og "T(n +1);x(β)" for alle forekomster av henholdsvis "T;x(α)" og "T;x(β)" og setter inn "CT(n +1);x(α)" og "CT(n+1);x(β)" for alle forekomster av henholdsvis "CT;x(α)" og "CT;x(β)"

Vi skal bevise et teorem som forbinder operasjonen T;x med CT;x:

Teorem: (Iterasjonsteorem 2) Anta n>=0. Da holder de følgende tre påstander i Kη- :
(i) |- d;n(x) →. ~T(n+1);x(~α) ↔ CT(n+1);x(α)
(ii) |- α ↔ β → |- d;n(x) → (CT(n+1);x(α) ↔ CT(n+1);x(β))
(iii) |- d;n(x) → T(n+1);x(α) ↔ ~CT(n+1);x(~α)

Bevis: *Ad (i)*. Vi beviser satsen ved induksjon på n.
Basistrinn: Anta n=0. Da har man per definisjon at d;n(x) = η(x). Videre har man at ~T(n+1);x(~α) er ekvivalent med ~T;x(~α) og at CT(n+1);x(α) er ekvivlent med CT;x(α). Påstanden blir i dette tilfelle ekvivalent med :
|- η(x) → (~T;x(~α) ↔ CT;x(α))
Men dette følger umiddelbart fra definisjonen av CT.

Induksjonstrinn: Vi viser at påstanden holder for n+1 om den holder for n. Anta den holder for n. Dette innebærer at: (1) |- d;n(x) →. ~T(n+1);x(~α) ↔ CT(n+1);x(α)
Fra (1) følger ved hjelp av setningslogikk (2) |- d;n(x) →. T(n+1);x(~α) ↔ ~CT(n+1);x(α)
Ved hjelp av R2 kan man slutte fra dette:

(3) |- η(x) → T;x(d;n(x)) → T;x[T(n+1);x(~α) ↔ ~CT(n+1);x(α)] Ved substitusjon i det tredje punktet i Elementærteorem 2 har vi:

(4) |- η(x) → T;x[T(n+1);x(~α) ↔ ~CT(n+1);x(α)] →
T;x(T(n+1);x(~α)) ↔T;x(~CT(n+1);x(α))

Fra (3) og (4) følger ved setningslogikk:

(5) |- η(x) & T;x(d;n(x)) → T;x(T(n+1);x(~α)) ↔T;x(~CT(n+1);x(α))

Herav har vi så atter ved hjelp av setningslogikk:

(6) |- η(x) & T;x(d;n(x)) →. ~T;x(T(n+1);x(~α)) ↔ ~T;x(~CT(n+1);x(α))

Fra (6) følger så ved hjelp av lemma, og definisjonene av T(n), CT og CT(n) det vi ønsker:

|- d;(n+1)(x) →. ~T(n+2);x(~α) ↔ CT(n+2);x(α)

Dette viser at punkt (i) holder.

Ad (ii) Anta (1) |- α ↔ β. Da har vi (2) |- ~α ↔ ~β. Fra dette kan man ved av punkt (i) i Iterasjonsteorem 1 slutte: (3) |- d;n(x) → T(n+1);x(~α) ↔ T(n+1);x(~β). Herav har man så ved hjelp av setningslogikk: (4) |- d;n(x) → ~T(n+1);x(~α) ↔ ~T(n+1);x(~β). Fra dette og det som ble bevist under det forrige punktet følger så ved hjelp av setningslogikk det vi ønsker: |- η(x) → (CT(n+1);x(α) ↔ CT(n+1);x(β)). Dette viser at (ii) holder.

Ad (iii) Fra punkt (i) følger ved substitusjon av "~α" for "α":
(1) |- d;n(x) →. ~T(n+1);x(~~α) ↔ CT(n+1);x(~α). Fra dette har man så ved hjelp av setningslogikk: (2) |- d;n(x) →. T(n+1);x(~~α) ↔ ~CT(n+1);x(~α). Nå har man
(4) |- α ↔ ~~α. Ved hjelp av punkt (i) i forrige teorem følger da:
(5) |- d;n(x) →. T(n+1);x(α) → T(n+1);x(~~α). Fra dette og (2) følger så ved setningslogikk det vi ønsker: |- d;n(x) → T(n+1);x(α) ↔ ~CT(n+1);x(~α). Dette viser at (iii) holder.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for teoremet. **QED.**

Teorem (Iterasjonsteorem 3). Anta n>= 0. Da gjelder som teoremer i Kη:

(i) |- α → |- d;n(x) → T(n+1);x(α)
(ii) |- d;n(x) →. (T(n+1);x(α) & T(n+1);x(α → β). → T(n+1);x(β))
(iii) |- d;n(x) → ~T(n+1);x(α& ~α)

Bevis: Ad (i). Påstanden bevises ved induksjon på n.

Basistrinn: For n=0 ser man i lys av definisjonen av d;n og T(n) at den innebærer: |- α → |- η(x) → T;x(α). Men dette er slutningsregelen R1 som er en av slutningsregelene i Kη.

Induksjonstrinn: Vi antar at regelen holder for n og skal vise at den holder for n+1. Anta (1) |- α. Etter induksjonshypotesen har vi da (2) |- d;n(x) → T(n+1);x(α). Ved hjelp av R2 kan vi fra dette slutte: (3) |- η(x) →. T;x(d;n(x)) → T;x(T(n+1);x(α)). Fra dette følger ved hjelp av ren setningslogikk og definisjonen av T(n):

(4) |- η(x) & T;x(d;n(x)) → T(n+2);x(α). Ved hjelp av hjelpesetningen vi tidligere viste følger så: (5). |- d;(n+1)(x) → T(n+2);x(α) som er det vi ønsker. Dette viser at punkt (i) holder.

Ad (ii). Også denne påstanden bevises ved induksjon på n.

Basistrinn: for n=0 ser man at satsen sier det samme som

|- η(x) →. (T;x(α) & T;x(α → β). → T;x(β)). Men ble bevist som punkt (i) i Elementærteorem 2.

Induksjonstrinn: Vi antar som induksjonshypotese:
(1) |- d;n(x) →. (T(n+1);x(α) & T(n+1);x(α → β). → T(n+1);x(β)). Fra dette følger ved hjelp av R2:
(2) |- η(x) →.T;x(d;n(x)) → T;x[T(n+1);x(α) & T(n+1);x(α → β). → T(n+1);x(β)]
Ved substitusjon i punkt (i) i Elementærteorem 2 har man:
(3) |- η(x) →. T;x[T(n+1);x(α) & T(n+1);x(α → β). → T(n+1);x(β)]
→ T;x((T(n+1);x(α) & T(n+1);x(α → β)) → T;x(T(n+1);x(β)
Fra (2) og (3) følger ved hjelp av setningslogikk:
(4) |- η(x)&T;x(d;n(x)) → (T;x(T(n+1);x(α) & T(n+1);x(α → β)). → T;x(T(n+1);x(β))
Men ved substitusjon i A1 har man:
(5) |- η(x) → T;x(T(n+1);x(α) & T(n+1);x(α → β)) ↔
T;x(T(n+1);x(α)) & T;x(T(n+1);x(α → β))
Fra (4) og (5) følger så ved hjelp av setningslogikk:
(6) |- η(x)&T;x(d;n(x)) → T;x(T(n+1);x(α)) & T;x(T(n+1);x(α → β)) → T;x(T(n+1);x(β)
Fra dette, lemma og definisjonen av T(n), har vi så det vi ønsker, nemlig:
(7) |- d;(n+1)(x) →. (T(n+2);x(α) & T(n+2);x(α → β). → T(n+2);x(β)). Dette viser at punkt (ii) holder.

Ad (iii). Også denne påstanden bevises ved induksjon på n.

Basistrinn. For n=0 reduserer påstanden seg til |- η(x) → ~T;x(α & ~α). Dette gjenkjenner man som A2.

Induksjonstrinn: Som induksjonshypotese har vi (1) |- d;n(x) → ~T(n+1);x(α& ~α). Fra dette følger ved hjelp av R2: (4) |- η(x) → T;x(d;n(x)) → T;x(~T(n+1);x(α& ~α)). Nå har vi imidlertid tidligere bevist det følgende teorem: (5) |- η(x) → T;x(~α) → ~T;x(α). Setter man her inn T(n+1);x(α& ~α) for α får man:
(6) |- η(x) → T;x(~T(n+1);x(α& ~α)) → ~T;x(T(n+1);x(α& ~α)). Fra (6) og (4) følger imidlertid ved hjelp av setningslogikk:

(7) |- η(x)& T;x(d;n(x)) → ~T;x(T(n+1);x(α& ~α)). I lys av definisjonen av T(n) og lemmaet vi tidligere beviste kan vi herav slutte: |- d;(n+1)(x) → ~T(n+2);x(α& ~α). Dette viser at punkt (iii) i satsen holder.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for teoremet. **QED.**

Vi har at følgende sats holder:

Teorem: Følgende gjelder i Kη-:
(i) |- d;n(x) → (α↔β) → |- d;(n+1)(x) → T;x(α) ↔ T;x(β)
(ii) |- d;n(x) → (α↔β) → |- d;(n+1)(x) → CT;x(α) ↔ CT;x(β)

Bevis: Ad (i): Anta (1) |- d;n(x) → (α↔β). Da har vi ved hjelp av R3:
(2) |- η(x) → T;x(d;n(x)) → T;x(α↔β). Ved hjelp av punkt (iii) i Elementærteorem 2 har vi:
(3) |- η(x) → T;x(α↔β) → T;x(α) ↔ T;x(β). Fra (2) og (3) følger ved hjelp av setningslogikk: (4) |- η(x) & T;x(d;n(x)) → T;x(α) ↔ T;x(β). Men ved hjelp av lemma som vi tidligere har bevist følger da |- |- d;(n+1)(x) → T;x(α) ↔ T;x(β) som er det vi ønsker.

Ad (ii): Anta (1) |- d;n(x) → (α↔β) Herav følger ved hjelp av setningslogikk:
(2) |- d;n(x) → (~α↔~β). Ved hjelp av punkt (i) som vi nå har bevist følger da:
(3) |- d;(n+1)(x) → T;x(~α) ↔ T;x(~β). Fra dette har vi ved hjelp av setningslogikk:
(4) |- d;(n+1)(x) → ~T;x(~α) ↔ ~T;x(~β). Ved hjelp av definisjonen av CT følger da det vi ønsker nemlig: |- d;(n+1)(x) → CT;x(α) ↔ CT;x(β).

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED.**

Definisjon: Vi definerer uttrykket Q(n);x(α) induktivt på følgende måte:
(i) Q(1);x(α) er enten T;x(α) eller CT;x(α)
(ii) Q(n+1);x(α) er enten T;x(Q(n);x(α)) eller CT;x(Q(n);x(α).
Er Q(n);x(α) gitt er Q*(n);x(α) den formelen vi får fra Q(n);x(α) ved å bytte ut alle forekomster av T med CT og alle forekomster av CT med T.

Eksempel. Er Q(4);x(α) = T;x(CT;x(T;x(T;x(α)))) har vi at
Q*(4);x(α) = CT;x(T;x(CT;x(CT;x(α)))).

Vi skal gi bevis for den følgende sats:

Teorem: (Utvekslingsteorem 1) Det følgende holder i Kη-:
|- d;n(x) → . ~Q(n+1);x(α) ↔ Q*(n+1);x(~α)

Bevis: Satsen bevises ved induksjon på n. Basistrinn. n=0. Da har vi d;0(x) = η(x) og at Q(1);x(α) enten er T;x(α) eller CT;x(α). I det første tilfelle ser man lett at
(1) |- η(x) → ~T;x(α) ↔ CT;x(~α)
I det andre tilfelle har vi:
(2) |- η(x) → ~CT;x(α) ↔ T;x(~α)
Man ser at satsen holder i begge tilfelle.

Vi må imidlertid bevise at (1) og (2) holder. Ved setningslogikk har man: |- α↔~~α. Fra dette følger ved hjelp av R3: (3) |- η(x) → T;x(α) ↔ T;x(~~α). Ved setningslogikk: (4) |- η(x) → ~T;x(α) ↔ ~T;x(~~α). Herav følger så (1) ved hjelp av definisjonen av CT

Vi har åpenbart ved setningslogikk at (5) |- η(x) → T;x(~α) ↔ T;x(~α). Herav ved setningslogikk: |- η(x) → ~~T;x(~α) ↔ T;x(~α). Fra dette følger (2) ved hjelp av definisjonen av CT.

Induksjonstrinn. Vi antar satsen holder for n:
(1) |- d;n(x) → . ~Q(n+1);x(α) ↔ Q*(n+1);x(~α)
Vi skal vise at den holder for n+1. Det er nødvendig å skille mellom to tilfelle:

Tilfelle (a): (2) Q(n+2);x(α) = T;x(Q(n+1);x(α)). I så tilfelle har vi
(3) Q*(n+2);x(~α) = CT;x(Q*(n+1);x(~α). Fra (1) har vi ved hjelp av forrige teorem:
(4) |- d;n+1(x) → . T;x(Q(n+1);x(α)) ↔ T;x(~Q*(n+1);x(~α)) Ved hjelp av setningslogikk følger fra dette: (5) |- d;n+1(x) → . ~T;x(Q(n+1);x(α)) ↔ ~T;x(~Q*(n+1);x(~α)) Herav har vi så ved hjelp av (2) og (3) det vi ønsker
(6) |- d;n+1(x) → ~Q(n+2);x(α) ↔ Q*(n+2);x(~α).

Tilfelle (b): (7) Q(n+2);x(α) = CT;x(Q(n+1);x(α)). I så tilfelle har vi
(8) Q*(n+2);x(~α) = T;x(Q*(n+1);x(~α). Fra (1) har vi ved hjelp av punkt (i) i det foregående teorem: (9) |- d;n(x) → . T;x(~Q(n+1);x(α)) ↔ T;x(Q*(n+1);x(~α)). Fra dette følger ved hjelp av ren setningslogikk:
(10) |- d;n(x) → .~~T;x(~Q(n+1);x(α)) ↔ T;x(Q*(n+1);x(~α))
Fra dette og definisjonen av CT har vi så i sin tur:
(11) |- d;n(x) → .~CT;x(Q(n+1);x(α)) ↔ T;x(Q*(n+1);x(~α)). Fra (11) følger sammen med (7) og (8) det vi ønsker nemlig:
|- d;n+1(x) → ~Q(n+2);x(α) ↔ Q*(n+2);x(~α).
Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED.**

§6 Generaliserte versjoner av iterasjonsteoremene.

Vi skal studere noen teoremer som er enda mer generelle enn de iterasjonsteoremene som vi så langt har betraktet og bevist. Vi definerer induktivt uttrykket T(<x;1,...,x;n>)(α) der <x; 1,...,x;n> er en sekvens av n variabeltegn på følgende vis:

Definisjon:
(i) T(<x;1>)(α) = T;(x;1)(α)
(ii) T(<x;1,...,x;n+1>)(α) = T;(x;(n+1))((T(<x;1,...,x;n>)(α))

Det er ikke helt enkelt å finne en treffende og suggestiv lesemåte av utrykket "T(<x;1,...,x;n>)(α)". Er n=3 har man at T(<x;1,...,x;n>)(α) = T;x3(T;x2(T;x1(α))). Dette innebærer at "T(<x; 1,...,x;n>)(α)" i dette tilfelle kan leses som " x3 tror at x2 tror at x1 tror at α", hvor det er mulig at x1,x2 og x3 representerer tre distinkte individer. Merk at det er mulig at x1,x2 og x3 er forskjellige. Men det er intet krav at de skal være det. Har man at x;1=x2=....=x;n ser man lett at T(<x;1,...,x;n>)(α) = T(n);(x;1)(α) der T(n) er definert som tidligere. Vi definerer CT(<x;1,...,x;n>) på tilsvarende måte:

Definisjon:
(i) CT(<x;1>)(α) = CT;(x;1)(α)
(ii) CT(<x;1,...,x;n+1>)(α) = CT;(x;(n+1))((CT(<x;1,...,x;n>)(α))

Det er naturligvis enda vanskeligere å finne en kort, intuitiv og suggestiv lesemåte for uttrykket "CT(<x;1,...,x;n>)(α)" enn "T(<x;1,...,x;n>)(α)". Man ser imidlertid at for eksempel "CT(<x;1,...,x;3>)(α)" kan leses "Det er logisk forenlig med alt det x3 tror at det er logisk forenelig med alt det x2 tror at det er logisk forenelig med alt det x1 tror at α". Man ser at dette knapt er et uttrykk som er leselig for vanlige mennesker.

Også i dette tilfelle er det lett å se at CT(<x;1,...,x;n>)(α) = T;(x;1)(α) om x;1= x;2 =...=x;n. Vi skal bevise dette nedenfor.

Uttrykket δ(<x;1...,x;n>), som kan oppfattes som et "n-ært rasjonalitetspredikat", er en generalisering av uttrykket "d;n(x)" som vi definerte tidligere. Det er induktivt definert slik:

Definisjon:
(i) δ(<x;1>) = η(x;1)
(ii) δ(<x;1,....,x;n+1>) = η(x;n+1)& T;(x;n+1)(δ(<x;1,...,x;n>))

Også når det gjelder uttrykket "δ(<x;1,..,x;n>)" er det naturligvis vanskelig å finne en virkelig suggestiv og treffende lesemåte. Det skulle imidlertid ikke være vanskelig å se hva uttrykket egentlig sier når man studerer forskjellige tilfelle: Ser man på δ(<x;1,x;2>) finner man lett på basis av definisjonen at dette er ekvivalent med η(x;2) & T;(x;2)(δ(<x;1>). Dette er i sin tur ekvivalent med, i lys av punkt (i) i definisjonen ovenfor: η(x;2) & T;(x;2)(η(x;1)). δ(<x; 1,x2>) innebærer derfor at trosfeltet til x;2 er logisk organisert og at x;2 tror at trosfeltet til x;1 er logisk organisert. Ser man på δ(<x;1,x;2,x;3>) finner man raskt at dette er ekvivalent med: η(x;3) & T;(x;3)(η(x;2) & T;(x;2)(η(x;1)). Som man ser innebærer dette for det første at trosfeltet til x;3 er logisk organisert og dessuten at x;3 tror to ting, nemlig for det første at trosfeltet til x;2 er logisk organisert og dessuten at x;2 tror at trosfeltet til x;1 er logisk organisert. Selvfølgelig finnes det ingen "poetisk" lesemåte av uttrykk som for eksempel: "δ(<x;1,....,x;20>)".

Det følgende teorem viser nøyaktig sammenhengen mellom de tre begrepene vi nå har definert og de tilsvarende tre begrepene T(n), CT(n) og d;n som vi tidligere definerte:

Teorem: Anta x;n = x for alle n>=1. Da gjelder i Kη-:
(i) |- T(<x;1,...,x;n>)(α) = T(n);x(α)
(ii) |- CT(<x;1,...,x;n>)(α) = CT(n);x(α)
Anta x;n = x for alle n>=0. Da gjelder i Kη-:
(iii) |- δ(<x;1,...,x;(n+1)>) = d;n(x)

Bevis: *Ad (i)*: Påstanden bevises ved induksjon. Basistrinn: n=1. Da har vi at
|- T(<x;1,..,x;n>)(α) = T;x1(α)= T(1);(x)(α). Satsen holder derfor i dette tilfellet.
Induksjonstrinn. Anta satsen holder for n. Vi har:

|- T(<x;1,...,x;(n+1)>)(α) = T;(x;(n+1))(T<x;1,...,x;n>)(α))
= T;(x;(n+1))(T(n);x(α))
= T;x(T(n);x(α))
= T(n+1);x(α) Dette viser at (i) holder.

Ad (ii): Påstanden bevises ved induksjon. Basistrinn: n=1. Da har vi at
|- CT(<x;1,..,x;n>)(α) = CT;x1(α)= CT(1);(x)(α). Satsen holder derfor i dette tilfellet.
Induksjonstrinn: Anta satsen holder for n. Vi har:

|- CT(<x;1,...,x;(n+1)>)(α) = CT;(x;(n+1))(CT<x;1,...,x;n>)(α))
= CT;(x;(n+1))(T(n);x(α))
= CT;x(T(n);x(α))
= CT(n+1);x(α) Dette viser at (ii) holder.

Ad (iii): Anta x;n = x for alle n>=0. Påstanden bevises ved induksjon. Basistrinn: Anta n=0. Da har vi i lys av definisjonene av δ og d:

|- δ(<x;1,...,x;(n+1)>)= δ(<x;1>) = η(x;1) = η(x) = d;0(x)

Satsen holder derfor for n=0.
Induksjonstrinn. Anta påstanden holder for n, med andre ord: (1) δ(<x;1,...,x;(n+1)>) = d;n(x)
Vi har: (2) |- δ(<x;1,...,x;(n+2)>) = η(x;n+2)& T;(x;n+2)(δ(<x;1,...,x;n+1>))
= η(x;n+2)& T;(x;n+2)(d;n(x)) Jamfør (1)
= η(x) & T;x(d;n(x)) Jamfør forutsetning om x;n=x om n>=0
I lys av en hjelpesetning som vi tidligere beviste har vi (3) |- η(x) & T;x(d;n(x)) = d;(n+1)(x) for alle n>=0. Fra (2) og (3) følger det vi ønsker, nemlig:

δ(<x;1,...,x;(n+2)>) = d;(n+1)(x) Dette viser at (iii) holder.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for teoremet. **QED.**

Den følgende sats generaliserer endel av de resultatene vi kom frem til tidligere:

Teorem. (Generalisert iterasjonsteorem 1). Anta n>=1. Man kan da utlede i Kη:
(i) |- δ(<x;1,...,x;n>) →. T(<x;1,...,x;n>)(α&β) ↔
T(<x;1,...,x;n>)(α) & T(<x;1,...,x;n>)(β)
(ii) |- δ(<x;1,...,x;n>) → ~T(<x;1,...,x;n>)(α& ~α)
(iii) |- α → |- δ(<x;1,...,x;n>) → T(<x;1,...,x;n>)(α)
(iv) |- α→ β → |- δ(<x;1,...,x;n>) →. T(<x;1,...,x;n>)(α)→ T(<x;1,...,x;n>)(β)

Når det gjelder punkt (i) ser man at denne formelen på en nokså iøyne fallende måte med aksiomskjemaet A1. Man ser også at (ii) - (iv) har sine motsvarigheter i henholdsvis A1 og slutningsreglene R1 og R2. Det følger at vi i alle de elemntærteoremene vi tidligere har bevist kan erstatte "η(x)" med "δ(<x;1,...,x;n>)" og alle forekomster av "T;x(α)" med " T(<x; 1,...,x;n>)(α)" og fremdeles få satser som holder.

Bevis: *Ad (i)*: Påstanden bevises ved induksjon på n. Basistrinn. n=1. Da har vi:

(1) $\delta(<x;1,...,x;n>) = \delta(<x;1>) = \eta(x;1)$

(2) $T(<x;1,...,x;n>)(\alpha\&\beta) = T(<x;1>)(\alpha\&\beta) = T;(x;1)(\alpha\&\beta)$

(3) $T(<x;1,...,x;n>)(\alpha) = T(<x;1>)(\alpha) = T;(x;1)(\alpha)$

(4) $T(<x;1,...,x;n>)(\beta) = T(<x;1>)(\beta) = T;(x;1)(\beta)$

Man ser i lys av (1) - (4) at påstanden i dette tilfelle reduseres til:

(5) $\eta(x;1) \rightarrow .\ T;(x;1)(\alpha\&\beta) \leftrightarrow T;(x;1)(\alpha)\ \&\ T;(x;1)(\beta)$.

Dette holder i kraft av aksiom A1.

Induksjonstrinn: Anta satsen holder for n, med andre ord, anta:

(1) $\vdash \delta(<x;1,...,x;n>) \rightarrow .\ T(<x;1,...,x;n>)(\alpha\&\beta) \leftrightarrow T(<x;1,...,x;n>)(\alpha)\ \&\ T(<x;1,...,x;n>)(\beta)$

Vi skal vise at den holder for n+1. Nå har vi fra (1) ved hjelp av R2

(2) $\vdash \eta(x;(n+1)) \rightarrow .\ T;(x;n+1)(\delta(<x;1,...,x;n>)) \rightarrow .\ T;(x;n+1)[T(<x;1,...,x;n>)(\alpha\&\beta) \leftrightarrow T(<x;1,...,x;n>)(\alpha)\ \&\ T(<x;1,...,x;n>)(\beta)]$. Nå har man ved hjelp av elementærteorem 2:

(3) $\vdash \eta(x;(n+1)) \rightarrow .\ (T;(x;n+1)(\alpha\leftrightarrow\beta) \rightarrow T;(x;n+1)(\alpha)\leftrightarrow T;(x;n+1)(\beta))$

Setter man inn i (3) " $T(<x;1,...,x;n>)(\alpha\&\beta)$" for "α" og " $T(<x;1,...,x;n>)(\alpha)\ \&\ T(<x;1,...,x;n>)(\beta)$" for "β" får man:

(4) $\vdash \eta(x;(n+1)) \rightarrow .$

$(T;(x;n+1)(\ T(<x;1,...,x;n>)(\alpha\&\beta)\leftrightarrow T(<x;1,...,x;n>)(\alpha)\ \&\ T(<x;1,...,x;n>)(\beta)) \rightarrow$

$T;(x;n+1)(\ T(<x;1,...,x;n>)(\alpha\&\beta))\leftrightarrow$

$T;(x;n+1)(\ T(<x;1,...,x;n>)(\alpha)\ \&\ T(<x;1,...,x;n>)(\beta)))$

Fra (3) og (4) følger ved hjelp av setningslogikk:

(5) $\vdash \eta(x;(n+1)) \rightarrow .\ T;(x;n+1)(\delta(<x;1,...,x;n>)) \rightarrow .$

$T;(x;n+1)(\ T(<x;1,...,x;n>)(\alpha\&\beta))\leftrightarrow$

$T;(x;n+1)(\ T(<x;1,...,x;n>)(\alpha)\ \&\ T(<x;1,...,x;n>)(\beta)))$

Ved substitusjon i A1 har man:

(6) $\vdash \eta(x;(n+1)) \rightarrow .\ T;(x;n+1)(\ T(<x;1,...,x;n>)(\alpha)\ \&\ T(<x;1,...,x;n>)(\beta))$

$\leftrightarrow T;(x;n+1)(\ T(<x;1,...,x;n>)(\alpha))\ \&\ T;(x;n+1)(T(<x;1,...,x;n>)(\beta))$

Fra (5) og (6) følger ved hjelp av ren setningslogikk:

(7) $\vdash \eta(x;(n+1))\ \&\ T;(x;n+1)(\delta(<x;1,...,x;n>)) \rightarrow .$

$T;(x;n+1)(\ T(<x;1,...,x;n>)(\alpha\&\beta))\leftrightarrow$

$T;(x;n+1)(\ T(<x;1,...,x;n>)(\alpha))\ \&\ T;(x;n+1)(T(<x;1,...,x;n>)(\beta))$

Men fra dette har vi ved hjelp av definisjonene av δ og $T(<x;1,...,x;n>)$ det vi ønsker:

(8) $\vdash \delta(<x;1,...,x;n+1>) \rightarrow .\ T(<x;1,...,x;n+1>)(\alpha\&\beta) \leftrightarrow T(<x;1,...,x;n+1>)(\alpha)\ \&\ T(<x;1,...,x;n+1>)(\beta)$

Dette viser at (i) holder.

Ad (ii): Ved induksjon. Basistrinn: n=1. Da har vi $\delta(<x;1,...,x;n>) = \eta(x;1)$. Dessuten har vi: $T(<x;1,...,x;n>)(\alpha\&\sim\alpha) = T;(x;1)(\alpha\&\sim\alpha)$. Satsen resduseres da til følgende versjon av aksiomskjema A2: $\vdash \eta(x;1) \rightarrow \sim T;(x1)(\alpha\&\sim\alpha)$.

Induksjonstrinn: Anta satsen holder for vilkårlig n>=1, med andre ord:

(1) $\vdash \delta(<x;1,...,x;n>) \rightarrow \sim T(<x;1,...,x;n>)(\alpha\&\ \sim\alpha)$

Vi må da vise at den holder for n+1. Fra (1) følger ved hjelp av R2

(2) $\vdash \eta(x;n+1) \rightarrow .\ T;(x;n+1)(\delta(<x;1,...,x;n>)) \rightarrow T;(x;n+1)(\sim T(<x;1,...,x;n>)(\alpha\&\ \sim\alpha))$

Nå har vi ved hjelp av A2: (3) $\vdash \eta(x;n+1) \rightarrow .\ T;(x;n+1)(\sim\alpha) \rightarrow \sim T;(x;n+1)(\alpha)$ Setter vi inn "$T(<x;1,...,x;n>)(\alpha\&\ \sim\alpha)$" for "α" i (3) får vi:

(4) $\vdash \eta(x;n+1) \rightarrow .\ T;(x;n+1)(\sim T(<x;1,...,x;n>)(\alpha\&\ \sim\alpha)) \rightarrow \sim T;(x;n+1)(\ T(<x;1,...,x;n>)(\alpha\&\ \sim\alpha))$

Fra dette og (2) følger ved hjelp av ren setningslogikk:
(5) |- η(x;n+1) & T;(x;n+1)(δ(<x;1,...,x;n>)) → T;(x;n+1)(T(<x;1,...,x;n>)(α& ~α))
Ved hjelp av definisjonene av δ og T(<x;1,...,x;n>) følger herav det vi ønsker:
(6) |- δ(<x;1,...,x;n+1>) → ~T(<x;1,...,x;n+1>)(α& ~α). Dette viser at (ii) holder.

Ad (iii). Ved induksjon. Basistrinn: n=1. Da reduserer påstanden seg til R1.
Induksjonstrinn. Anta påstanden holder for n. Anta (1) |-α. Ved hjelp av induksjonshypotesen har vi da: (2) |- δ(<x;1,...,x;n>) → T(<x;1,...,x;n>)(α) Fra (2) følger ved hjelp av R2:

(3) |- η(x;n+1) →. T;(x;n+1)(δ(<x;1,...,x;n>)) → T;(x;n+1)(T(<x;1,...,x;n>)(α))

Fra dette har man i sin tur ved ren setningslogikk:

(4) |- η(x;n+1) & T;(x;n+1)(δ(<x;1,...,x;n>)) → T;(x;n+1)(T(<x;1,...,x;n>)(α))

Ved hjelp av definisjonene av δ og T(<x;1,...,x;n>) følger herav det vi ønsker:
(5) |- δ(<x;1,...,x;n+1>) → T(<x;1,...,x;n+1>)(α) . Dette viser at (iii) holder.

Ad (iv): Påstanden bevises ved induksjon. Basistrinn: Er n=1 reduserer (iv) seg til R2.
Induksjonstrinn: Vi antar at slutningsregelen holder for n og skal vise at den holder for n+1.
Anta (1) |- α→β. Ved hjelp av induksjonshypotesen følger da:

(2) |- δ(<x;1,...,x;n>) →. T(<x;1,...,x;n>)(α)→ T(<x;1,...,x;n>)(β)

Fra dette har vi ved hjelp av R2:
(3) |- η(x;n+1) →. T;(x;n+1)(δ(<x;1,...,x;n>)) →
T;(x;n+1)(T(<x;1,...,x;n>)(α)→ T(<x;1,...,x;n>)(β))
Ved hjelp av (i) i Elementærteorem 2 har vi:
(4) |- η(x;n+1) →. T;(x;n+1)(α→β) → (T;(x;n+1)(α)→ T;(x;n+1)(β)). Setter man her inn "T(<x;1,...,x;n>)(α)" for "α" og "T(<x;1,...,x;n>)(β)" for "β" får man:
(5) |- η(x;n+1) →. T;(x;n+1)(T(<x;1,...,x;n>)(α)→ T(<x;1,...,x;n>)(β)) →
(T;(x;n+1)(T(<x;1,...,x;n>)(α))→ T;(x;n+1)(T(<x;1,...,x;n>)(β)))
Fra (3) og (5) følger ved hjelp av setningslogikk:
(6) |- η(x;n+1) →. T;(x;n+1)(δ(<x;1,...,x;n>)) →
T;(x;n+1)(T(<x;1,...,x;n>)(α))→ T;(x;n+1)(T(<x;1,...,x;n>)(β))
Ved hjelp av definisjonene av δ og T(<x;1,...,x;n>) følger herav det vi ønsker:
(7) |- δ(<x;1,...,x;n+1>) →. T(<x;1,...,x;n+1>)(α)→ T(<x;1,...,x;n+1>)(β)
Dette viser at (iv) holder.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED.**

§7 Sterkere kalkyler. Andre potensielle aksiomskjemata som kan legges til Kη

I kalkylen Kη inngår ikke noen av de følgende skjemaer som det kan være av interesse å drøfte nærmere:

B1	η(x) → T;x(η(x))
B2	T;x(α) → T;x(T;x(α))
B3	T;x(T;x(α)) → T;x(α)
B4	η(x) →. T;x(α) → T;x(T;x(α))
B5	η(x) →. T;x(T;x(α)) → T;x(α)
B6	η(x) → T;x(T;x(α) → α)
B7	η(x) →. T;x(α →T;x(α))
B8	η(x) → T;x(α ↔ T;x(α))

B9 $\eta(x) \rightarrow T;x(\alpha) \vee T;x(\sim\alpha)$
B10 $\eta(x) \rightarrow T;x(T;x(\alpha) \vee T;x(\sim\alpha))$
B11 $\eta(x) \rightarrow. \sim T;x(T;x(\alpha) \& \sim\alpha)$
B12 $\eta(x) \rightarrow. \sim T;x(\alpha \& \sim T;x(\alpha))$

Er Δ en mengde med formler i L betegner $K\eta[\Delta]$ den kalkylen vi får når $K\eta$ utvides med alle formlene i Δ som nye aksiomer. Det vi skal vise i første omgang når det gjelder formlene B1 til B12 er at kalkylen $K\eta[\Delta]$ er konsistent om Δ er en hvilken som helst delmengde av {B1,...,B12}.

La L være språket til kalkylen $K\eta$. Vi lar L* betegne språket man sitter igjen med når man fra L fjerner det spesielle predikatet η og operatoren T;x. L* er altså det førsteordens språket som inneholder de n-ære predikater for n>= 1, identitetspredikatet, de vanlige variabeltegnene, konstanter, de setningslogiske konnektivene samt allkvantoren og eksistenskvantoren som foreligger i L, men altså ikke noe annet. Vi betegner mengden av de vanlige predikatlogiske teoremene i dette språket L* med Q.

Vi skal nå definere en avbildning ξ som tilordner alle formler i L formler i L*. Denne avbildningen er definert induktivt på lengden av formler i L ved den følgende definisjon:

Definisjon:

I det følgende står α,β for vilkårlige formler i L. a, og a;i for i=1...n er enten variabeltegn eller konstanter i L. P er et vilkårlig n-ært predikat i L. ξ er definert induktivt slik:

(i) $\xi(P(a;1,... a;n)) = P(a;1,... a;n)$ om P er et n-ært predikat i L
(ii) $\xi(a;1= a;2) = (a;1= a;2)$
(iii) $\xi(\alpha\&\beta) = \xi(\alpha) \& \xi(\beta)$
(iv) $\xi(\alpha v\beta) = \xi(\alpha) \vee \xi(\beta)$
(v) $\xi(\sim\alpha) = \sim\xi(\alpha)$
(vi) $\xi (\alpha\rightarrow\beta) = \xi(\alpha) \rightarrow \xi(\beta)$
(vii) $\xi (\alpha\leftrightarrow\beta) = \xi(\alpha) \leftrightarrow \xi(\beta)$
(viii) $\xi((Ax)\alpha) = (Ax)\xi(\alpha)$
(ix) $\xi((Ex)\alpha) = (Ex)\xi(\alpha)$
(x) $\xi(\eta(a)) = (a= a)$
(xi) $\xi (T;a(\alpha)) = \xi(\alpha)$

Denne definisjonen kan virke mer komplisert enn den egentlig er. La α være en formel i L. Da er $\xi(\alpha)$ den formelen man får når man erstatter alle forekomster av delformler av typen "$\eta(x)$" med "x=x" og fjerner alle forekomster av uttrykket "T;x". Noen eksempler kan gjøre dette klarere.

Eksempel 1: Anta α er formelen "$\eta(x) \rightarrow. T;x(P(y)) \rightarrow T;x((Ez)P(z))$" hvor P er et monadisk predikat i L. Man ser da lett ved å bruke reglene ovenfor at $\xi(\alpha)$ er formelen:
" $x=x \rightarrow. P(y) \rightarrow (Ez)P(z)$" Den første formelen er åpenbart et teorem i $K\eta$. Man ser at den siste formelen er et teorem i predikatlogikken med identitet.

Eksempel 2: Anta formelen α er "$(Ay)(T;x(R(z,y) \rightarrow G(y))) \rightarrow T;x(R(z,x) \rightarrow G(x))$". I denne formelen forutsettes det at R er et binært predikat og G et monadisk predikat i L. Man ser at α er en instans av det predikatlogiske aksiomskjemaet Q4. Benytter man seg av reglene

som er gitt i definisjonen ovenfor ser man lett at man når frem til det samme resultat som om man bare fjerner alle forekomster av "T;x" fra formelen. Som man lett ser har man at $\xi(\alpha)$ blir formelen "$(Ay)(R(z,y) \rightarrow G(y)) \rightarrow (R(z,x) \rightarrow G(x))$". Man ser at denne siste formelen selv er en instans av aksiomskjemaet Q4 og derfor et predikatlogisk teorem.

Selve konsistenssatsen kan formuleres slik:

Teorem: Anta Δ en delmengde av aksiomskjemaene B1 - B13. Da har vi for alle formler i L at

$$K\eta[\Delta] \vdash \alpha \rightarrow Q \vdash \xi(\alpha)$$

Man ser at det vil være tilstrekkelig å bevise denne satsen. For anta α var en formel der man hadde $K\eta[\Delta] \vdash \alpha\&\sim\alpha$. Ved hjelp av definisjonen ovenfor ser man at $\xi(\alpha\&\sim\alpha) = \xi(\alpha) \,\&\, \sim\xi(\alpha)$. Man måtte i så tilfelle ha i lys av teoremet at $Q \vdash \xi(\alpha) \,\&\, \sim\xi(\alpha)$. Men vi vet på forhånd at vanlig predikatlogikk er konsistent. Det følger da at $K\eta[\Delta]$ er konsistent.

Bevis: Skal beviset føres helt detaljert må man verifisere for alle aksiomene i $K\eta$, dvs. Q1 - Q7, som er de rent predikatlogiske aksiomene, A1 og A2, samt alle formelene B1- B13 at dersom α er en av disse formelene så er $\xi(\alpha)$ et teorem i predikatlogikken Q. Dette innebærer at man i måtte gå igjennom to og tyve formler. Men det er enkelt på basis av definisjonen av ξ å se at den omformer alle disse aksiomskjemaene til teoremer i Q. Det får være nok å vise dette ved noen eksempler. (i) La oss ta det predikatlogiske aksiomet $\gamma = ((Ax)\alpha \rightarrow \alpha;x[a])$. Her skal a enten være en konstant eller et variabeltegn som er substituerbart for x i α. Vi har åpenbart ved hjelp av definisjonen av ξ at

(1) $\xi(\gamma) = \xi((Ax)\alpha \rightarrow \alpha;x[a]) = \xi((Ax)\alpha) \rightarrow \xi(\alpha;x[a])$
$= (Ax)\xi(\alpha) \rightarrow \xi(\alpha);x[a]$

Man ser at den siste formelen i disse ligningene er en instans av skjemaet γ og derfor selvfølgelig utledbart som et teorem i Q. Man må imidlertid her vise i tillegg at dersom α er en formel hvor a er subsituerbar for x så er har vi også at $\xi(\alpha)$ er en formel hvor a er subsituerbar for x og at $\xi(\alpha;x[a]) = \xi(\alpha);x[a]$. Men dette gjøres lett ved et induksjonsbevis på lengden av α. Siden også dette beviset blir nokså langt gjennomfører vi det ikke detaljert her.
(ii) La oss ta for oss aksiomskjemaet A1. Vi har da at

$\alpha = (\eta(x) \rightarrow . T;x(\alpha \,\&\, \beta) \leftrightarrow (T;x(\alpha) \,\&\, T;x(\beta)))$

I dette tilfelle har man:

$\xi(\alpha) = \xi(\eta(x)) \rightarrow \xi(T;x(\alpha \,\&\, \beta) \leftrightarrow (T;x(\alpha) \,\&\, T;x(\beta)))$
$= x=x \rightarrow \xi(T;x(\alpha \,\&\, \beta) \leftrightarrow (T;x(\alpha) \,\&\, T;x(\beta)))$
$= x=x \rightarrow \xi(T;x(\alpha \,\&\, \beta)) \leftrightarrow \xi(T;x(\alpha) \,\&\, T;x(\beta)))$
$= x=x \rightarrow \xi(T;x(\alpha \,\&\, \beta)) \leftrightarrow \xi(T;x(\alpha)) \,\&\, \xi(T;x(\beta))$
$= x=x \rightarrow \xi(\alpha \,\&\beta) \leftrightarrow \xi(\alpha) \,\&\, \xi(\beta) = x=x \rightarrow . \xi(\alpha) \,\&\xi(\beta) \leftrightarrow \xi(\alpha) \,\&\, \xi(\beta)$

Man ser altså at $\xi(\alpha) = x=x \rightarrow . \xi(\alpha) \,\&\xi(\beta) \leftrightarrow \xi(\alpha) \,\&\, \xi(\beta)$ og derfor at $\xi(\alpha)$ er et rent predikatlogisk teorem.
(ii) La oss også ta for oss A2. Man har da at $\alpha = (\eta(x) \rightarrow \sim T;x(\alpha\&\sim\alpha))$. Ved å anvende definisjonen av ξ har vi:

$\xi(\alpha) = \xi(\eta(x) \rightarrow \sim T;x(\alpha\&\sim\alpha)) = (x=x \rightarrow \xi(\sim T;x(\alpha\&\sim\alpha)))$
$= (x=x \rightarrow \sim\xi(T;x(\alpha\&\sim\alpha)))$
$= (x=x \rightarrow \sim\xi(\alpha\&\sim\alpha))$
$= (x=x \rightarrow \sim(\xi(\alpha)\&\sim\xi(\alpha)))$

Det følger at $\xi(\alpha)$ er et predikatlogisk teorem.

(iii) Det skulle være åpenbart at Mg(β: Q|- ξ(β)) er lukket under modus ponens og universell generalisering. Vi overlater til leseren å verifisere dette. la oss imidlertid vise at Mg(β: Q|- ξ(β)) er lukket under regelen R1p. Anta (1) αê Mg(β: Q|- ξ(β)). Vi skal vise at

(2) (η(x) → T;x(α))êMg(β: Q|- ξ(β))

(2) er åpenbart i lys av definisjonen av ξ ekvivalent med at

(3) Q|- x=x → ξ(α). Men fra (1) følger (4) Q|- ξ(α). Man ser lett at (3) følger fra (4).

(iv) Vi avslutter med å vise at Mg(β: Q|- ξ(β)) er lukket under R2. Anta (1) (α→β)êMg(β: Q|- ξ(β)). Fra dette følger ved hjelp av definisjonen av ξ: (2) Q|- (ξ(α) → ξ(β)). Vi må imidlertid vise at

(η(x) → T;x(α) → T;x(β))êMg(β: Q|- ξ(β)), med andre ord at (3) Q|- ξ(η(x) → T;x(α) → T;x(β)). Men ved hjelp av definisjonen av ξ ser man at:

(4) ξ(η(x) → T;x(α) → T;x(β)) = (x=x →. ξ(α) → ξ(β)). Vi har altså at (3) er ekvivalent med:

(5) Q|- (x=x →. ξ(α) → ξ(β)). Det er imidlertid åpenbart at dette følger fra (2). Dette viser at Mg(β: Q|- β) også er lukket R2. På tilsvarende vis kan man gå frem ved de andre slutningsreglene og aksiomskjemaene vi har nevnt. **QED.**

§8 Kalkylen Kη utvidet med aksiomet B1.

Det er ikke noe spesielt opplagt ved aksiomet B1, dvs. formelen (1) η(x) → T;x(η(x)). Formelen utrykker at dersom x er en person hvis trosfelt er rasjonelt organisert så er det også slik at x tror at x's trosfelt er rasjonelt organisert.

Det er intet tvingende ved denne setningen når man tar i betraktning den definisjonen vi tidligere har gitt av hva som menes med et rasjonelt organisert trosfelt. At trosfeltet til x er rasjonelt organisert innebærer ikke noe annet enn at at det er konsistent, at det inneholder alle logisk nødvendige utsagn, at det er lukket under logisk konsekvens og dessuten at det er konjunktivt lukket. Men fra dette kan vi ikke slutte at selve det utsagn som sier at trosfeltet til x er logisk organisert, med andre ord utsagnet at η(x) er med blandt alle de utsagn som x tror er sanne. (1) kan derfor neppe regnes som en logisk sannhet, eller et nødvendig sant utsagn. Men som vi har sett får man ikke noen inkonsistent kalkyle om Kη utvides med denne setningen og det kan ha en viss formell interesse å se hva man kan utlede i kalkylen Kη[B1], som ikke kan utledes i Kη.

Den følgende sats lar seg utlede i Kη utvidet med B1 som nytt logisk aksiom:

Teorem: Man har for alle n>= 0 at

Kη[B1] |- η(x) ↔ d;n(x)

Bevis: Satsen bevises ved induksjon på n.

Basistrinn: Anta n=0. Da har vi per definisjon at |- η(x) ↔ d;0(x). Satsen holder derfor åpenbart i dette tilfellet.

Induksjonstrinn: Anta satsen holder for n>=0. Med andre ord anta at (1) |- η(x) ↔ d;n(x) Vi skal vise at den holder for n+1. Nå har vi ved hjelp av lemmaet om d;n som vi tidligere beviste at (2) d;(n+1)(x) ↔ η(x) & T;x(d;n(x)). B1 sier at (3) |- η(x) → T;x(η(x)). Fra induksjonshypotesen (1) følger ved hjelp av slutningsregelen R3 som vi tidligere har bevist at (4) |- η(x) →. T;x(η(x)) ↔ T;x(d;n(x)). Fra dette og (3) kan man så slutte ved hjelp av ren setningslogikk at (5) |- η(x) ↔ η(x) &T;x(d;n(x)). Men fra dette og (2) følger, atter ved hjelp av setningslogikk, at (6) |- η(x) ↔ d;(n+1)(x). Dette viser at satsen holder. **QED.**

Ved hjelp av teoremet ovenfor følger at at noe sterkere versjoner av de iterasjonsteoremene vi tidligere har bevist kan utledes i Kη[B1]. Vi kan sammenfatte dette i det følgende teorem:

Teorem (Iterasjonsteorem 4):
I Kη[B1] holder følgende:

(i) $\vdash \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \vdash \eta(x) \rightarrow . T(n+1);x(\alpha) \rightarrow T(n+1);x(\beta)$
(ii) $\vdash \eta(x) \rightarrow . T(n+1);x(\alpha\&\beta) \leftrightarrow T(n+1);x(\alpha) \& T(n+1);(\beta)$
(iii) $\vdash \alpha \leftrightarrow \beta \rightarrow \vdash \eta(x) \rightarrow . T(n+1);x(\alpha) \leftrightarrow T(n+1);x(\beta)$
(iv) $\vdash \eta(x) \rightarrow . \sim T(n+1);x(\sim\alpha) \leftrightarrow CT(n+1);x(\alpha)$
(v) $\vdash \alpha \leftrightarrow \beta \rightarrow \vdash \eta(x) \rightarrow (CT(n+1);x(\alpha) \leftrightarrow CT(n+1);x(\beta))$
(vi) $\vdash \eta(x) \rightarrow T(n+1);x(\alpha) \leftrightarrow \sim CT(n+1);x(\sim\alpha)$
(vii) $\vdash \alpha \rightarrow \vdash \eta(x) \rightarrow T(n+1);x(\alpha)$
(viii) $\vdash \eta(x) \rightarrow . (T(n+1);x(\alpha) \& T(n+1);x(\alpha \rightarrow \beta). \rightarrow T(n+1);x(\beta))$
(ix) $\vdash \eta(x) \rightarrow \sim T(n+1);x(\alpha\& \sim\alpha)$

Bevis: Satsen følger ved hjelp av Iterasjonsteorem 1- 3, samt satsen som ble bevist rett ovenfor. **QED.**

På lignende vis ser man at en noe sterkere versjon av utvekslingsteoremet holder i Kη[B1]:

Teorem: (Utvekslingsteorem 2) Det følgende holder i Kη[B1]:
$\vdash \eta(x) \rightarrow . \sim Q(n+1);x(\alpha) \leftrightarrow Q^*(n+1);x(\sim\alpha)$

Bevis: Satsen følger ved hjelp av Utvekslingsteorem 1 og satsen ovenfor. **QED.**

§9 Kalkylen Kη utvidet med skjemaene B4 og B5.

Aksiomskjemaene B4 og B5 bør åpenbart diskuteres nøyere. Det er i og for seg ingenting i det forhold at trosfeltet til en person x er rasjonelt organisert, i den betydning vi her har lagt til grunn, som impliserer at dersom x tror at α så må det også være slik at x tror at x tror at α. Heller ikke er det noe som umiddelbart tilsier, dersom trosfeltet til x er rasjonelt organisert, at hvis utsagnet at x tror at α er med i det, så må også utsagnet at α være med i det. B4 og B5 kan derfor ikke ukritisk anses som logisk gyldige. Likevel har B2 og B3 en viss plausibilitet. Særlig B2. Og som man ser, følger B4 og B5 umiddelbart fra henholdsvis B2 og B3. Dette innebærer at det uansett kan være av interesse å se på hva som kan utledes i systemet man får når Kη utvides med B4 og B5.

Vi skal først gi bevis for den følgende sats:

Teorem. (Reduksjonsteorem 1) Følgende gjelder i Kη[B4,B5]:

(i) For alle n>=1 gjelder: $\vdash d;n(x) \leftrightarrow \eta(x) \& T;x(\eta(x))$
(ii) $\vdash \eta(x) \& T;x(\eta(x)) \rightarrow (\alpha\leftrightarrow\beta) \rightarrow \vdash \eta(x) \& T;x(\eta(x)) \rightarrow (T;x(\alpha) \leftrightarrow T;x(\beta))$
(iii) $\vdash \eta(x) \& T;x(\eta(x)) \rightarrow (\alpha\leftrightarrow\beta) \rightarrow \vdash \eta(x) \& T;x(\eta(x)) \rightarrow (CT;x(\alpha) \leftrightarrow CT;x(\beta))$
(iv) $\vdash \eta(x) \rightarrow . T;x(\alpha) \leftrightarrow T;x(T;x(\alpha))$
(v) $\vdash \eta(x) \rightarrow . CT;x(\alpha) \leftrightarrow CT;x(CT;x(\alpha))$

(vi) |- η(x) & T;x(η(x)) →. CT;x(T;x(CT;x(α))) → CT;x(α)
(vii) |- η(x) & T;x(η(x)) →. T;x(CT;x(α)) ↔ T;x(CT;x(T;x(CT;x(α))))
(viii) |- η(x) & T;x(η(x)) →. CT;x(T;x(α)) ↔ CT;x(T;x(CT;x(T;x(α))))

Bevis: *Ad (i)*: Påstanden bevises ved induksjon på n. Basistrinn: For n=1 har vi etter definisjonen av d at (1) d;1(x) = d;0(x)& T;x(d;0(x)) = η(x) & T;x(η(x)). Man ser fra dette at satsen holder i dette tilfellet.

Induksjonstrinn: Anta påstanden holder for n, med andre ord at:
(2) |- d;n(x) ↔ η(x) & T;x(η(x)) Vi skal vise at den holder for n+1. Vi har i kraft av et lemma vi tidligere beviste at: (3) |- d;n+1(x) ↔ η(x) & T;x(d;n(x)). Fra (2) følger ved hjelp av R3: (4) |- η(x) → T;x(d;n(x)) ↔ T;x(η(x) & T;x(η(x))) Fra dette og (3) følger ved hjelp av setningslogikk: (5) |- d;n+1(x) ↔ η(x) & T;x(η(x) & T;x(η(x))) Nå har vi ved hjelp av A1: (6) |- η(x) → T;x(η(x) & T;x(η(x))) ↔ T;x((x)) & T;x(T;x(η(x))). Nå har vi ved hjelp av B4 og B5 åpenbart at (7) |- η(x) →. T;x(η(x)) ↔ T;x(T;x(η(x)). Fra (5), (6) og (7) følger ved hjelp av setningslogikk det vi ønsker, nemlig: |- d;n+1(x) ↔ η(x) & T;x(η(x)). Dette viser at punkt (i) holder.

Ad (ii): Anta (1) |- η(x) & T;x(η(x)) → (α↔β). Da har vi ved hjelp av R2:
(2) |- η(x)→. T;x(η(x) & T;x(η(x))) → T;x(α↔β). Nå har vi ved hjelp av punkt (i) i Elemntærteorem 2: (3) |- η(x) → T;x(α↔β) → T;x(α) ↔ T;x(β). Fra (2) og (3) har man ved hjelp av setningslogikk: (4) |- η(x) & T;x(η(x) & T;x(η(x))) → T;x(α)↔T;x(β). Men man ser fra beviset under punkt (i) at man har:

(5) |- η(x) & T;x(η(x) & T;x(η(x))) ↔ η(x) &T;x(η(x)) Fra dette og (4) følger så det vi ønsker, nemlig: |- η(x) & T;x(η(x)) → T;x(α)↔T;x(β). Dette viser at (ii) holder.

Ad (iii): Anta (1) |- η(x) & T;x(η(x)) → (α↔β). Fra dette følger ved hjelp av setningslogikk: (2) |- η(x) & T;x(η(x)) → (~α↔~β). Fra dette og det vi viste under (ii) følger: (3) |- η(x) & T;x(η(x)) →. T;x(~α)↔T;x(~β). Ved hjelp av setningslogikk følger herav: (4) |- η(x) & T;x(η(x)) → ~T;x(~α)↔~T;x(~β). I lys av definisjonen av CT kan man fra dette slutte: |- η(x) & T;x(η(x)) →CT;x(α)↔CT;x(β). Dette viser at punkt (iii) holder.

Ad (iv): B4 innebærer: |- η(x) →. T;x(α) → T;x(T;x(α)). På den annen side innebærer B5 at |- η(x) →. T;x(T;x(α)) → T;x(α). Fra disse to forhold følger umiddelbart:
|- η(x) →. T;x(α) ↔ T;x(T;x(α)). Dette viser at punkt (iv) holder.

Ad (v): Ved substitusjon i B4 har vi (1) |- η(x) → T;x(~α) → T;x(T;x(~α)). Fra dette følger ved hjelp av setningslogikk: (2) |- η(x) → ~T;x(T;x(~α)) → ~T;x(~α). Nå har vi ved hjelp av ren setningslogikk: (3) |- T;x(~α) ↔ ~~T;x(~α). Ved hjelp av regelen R3 impliserer dette: (4) |- η(x) → T;x(T;x(~α)) ↔ T;x(~~T;x(~α)). (2) og (4) gir oss ved hjelp av setningslogikk: (5) |- η(x) → ~T;x(~~T;x(~α)) → ~T;x(~α). Fra dette og definisjonen av CT følger: (6) |- η(x) →. CT;x(CT,x(α)) → CT;x(α).

Ved substitusjon i B5 har man (7) |- η(x) →. T;x(T;x(~α)) → T;x(~α). Ved hjelp av ren setningslogikk følger herfra: (8) |- η(x) →. ~T;x(~α)→ ~T;x(T;x(~α)) . Nå har vi fra dette ved hjelp av (4) ovenfor at: (9) |- η(x) →. ~T;x(~α)→ ~T;x(~~T;x(~α)). Fra dette har vi så ved hjelp av definisjonen av CT: (10) |- η(x)→. CT;x(α) → CT;x(CT;x(α)). Fra (6) og (10) følger så det vi ønsker, nemlig: |- η(x)→. CT;x(α) → CT;x(CT;x(α)). Dette viser at (v) holder.

Ad (vi): Ved substitusjon i A2 har man : (1) |- η(x) → ~T;x(T;x(~α) & ~T,x(~α)). Ved substitusjon i A1 får man:

(2) |- η(x) → T;x(T;x(~α) & ~T,x(~α)) ↔ T;x(T;x(~α)) & T;x(~T,x(~α))

Fra dette og (1) følger ved hjelp av ren setningslogikk:

(3) |- η(x) → ~(T;x(T;x(~α)) & T;x(~T,x(~α))). Herav har man atter ved setningslogikk: (4) |- η(x) → T;x(T;x(~α)) → ~T;x(~T,x(~α)). Nå har vi ved substitusjon i B4 : (5) |- η(x) → T;x(~α)→ T;x(T;x(~α)). Fra (4) og (5) kan man slutte:

(6) |- η(x) → T;x(~α) → ~T;x(~T,x(~α))

Fra (6) og R1 har man: (7) |- η(x) → T;x(η(x)) → T;x(T;x(~α) → ~T;x(~T,x(~α))). Ved substitusjon i punkt (i) i Elementærteorem 2 får man:

(8) |- η(x) →. T;x(T;x(~α) → ~T;x(~T,x(~α))) → T;x(T;x(~α)) → T;x(~T;x(~T,x(~α)))

Fra (7) og (8) følger: (9) |- η(x) → T;x(η(x)) → T;x(T;x(~α)) → T;x(~T;x(~T,x(~α)))

Ved hjelp av (5) følger fra (9):

(10) |- η(x) → T;x(η(x)) → T;x(~α) → T;x(~T;x(~T,x(~α))). Fra dette har man ved setningslogikk: (11) |- η(x) &T;x(η(x)) → ~T;x(~T;x(~T,x(~α)))→~T;x(~α). Men fra dette følger ved hjelp av definisjonen av CT:

|- η(x) & T;x(η(x)) →. CT;x(T;x(CT;x(α))) → CT;x(α). Dette viser at (vi) holder.

Ad (vii): Vi viser først:

(1) |- η(x) & T;x(η(x)) →. T;x(CT;x(α)) → T;x(CT;x(T;x(CT;x(α))))

Ved substitusjon i A1 har man:

(2) |- η(x) → ~T;x(T;x(~T;x(~α)) & ~ T;x(~T;x(~α))). Ved hjelp av A2 følger herav: (3) |- η(x) → ~[T;x(T;x(~T;x(~α))) & T;x(~ T;x(~T;x(~α)))]. Fra dette har vi ved hjelp av setningslogikk:

(4) |- η(x) →. T;x(T;x(~T;x(~α))) → ~T;x(~ T;x(~T;x(~α))). Siden vi ved substitusjon i B4 har:

(5) |- η(x) → T;x(~T;x(~α)) → T;x(T;x(~T;x(~α))) følger fra (4) og (5) ved hjelp av setningslogikk: (6) |- η(x) → T;x(~T;x(~α)) → ~T;x(~ T;x(~T;x(~α))). Ved hjelp av R1 har man fra dette:

(7) |- η(x) &T;x(η(x)) → T;x[T;x(~T;x(~α)) → ~T;x(~ T;x(~T;x(~α)))]

Siden T;x distribuerer over et kondisjonaltegn gitt η(x) følger herav:

(8) |- η(x) &T;x(η(x)) → T;x(T;x(~T;x(~α))) → T:x(~T;x(~ T;x(~T;x(~α)))). Fra (8) og (5) har vi så ved hjelp av setningslogikk:

(9) |- η(x) &T;x(η(x)) → T;x(~T;x(~α)) → T:x(~T;x(~ T;x(~T;x(~α)))). Herav følger så (1) ved hjelp av definisjonen av CT.

Vi må nå vise den andre halvdelen av påstanden, med andre ord at:

(10) |- η(x) & T;x(η(x)) →. T;x(CT;x(T;x(CT;x(α))))→T;x(CT;x(α))

Nå har vi fra punkt (vi): (11) |- η(x) & T;x(η(x)) →. CT;x(T;x(CT;x(α))) → CT;x(α)

Fra dette følger ved hjelp av R1:

(12) |- η(x) → T;x(η(x) & T;x(η(x))) → T;x[CT;x(T;x(CT;x(α))) → CT;x(α)]

Siden T;x distribuerer over kondisjonalsetninger gitt η(x) følger herav:

(13) |- η(x) & T;x(η(x) & T;x(η(x))) → T;x(CT;x(T;x(CT;x(α)))) → T;x(CT;x(α))

Nå har vi: (14) |- d;2(x) ↔ η(x) & T;x(η(x) & T;x(η(x))). Men ifølge punkt (i) har vi :

|- d;2(x) ↔ η(x) &T;x(η(x)). Det følger at (10) holder. (1) og (10) viser at punkt (vii) holder.

Ad (viii): Vi har ved substitusjon i forrige punkt:

(1) |- η(x) & T;x(η(x)) →. T;x(CT;x(~α)) ↔ T;x(CT;x(T;x(CT;x(~α))))

Fra dette fremgår det at det vil være tilstrekkelig å bevise følgende to påstander:

(2) |- η(x)&T;x(η(x)) → T;x(CT;x(~α)) ↔ ~CT;x(T;x(α))

(3) |- η(x)&T;x(η(x)) → T;x(CT;x(T;x(CT;x(~α)))) ↔ ~CT;x(T;x(CT;x(T;x(α))))

Fra (1) - (3) følger satsen ved hjelp av ren setningslogikk.

Vi tar først for oss (2). Siden (4) |- α ↔ ~~α har vi ved hjelp av R3:
(5) |- η(x) → T;x(α) ↔ T;x(~~α). Herav følger ved hjelp av setningslogikk:
(6) |- η(x) → ~T;x(~~α) ↔ ~T;x(α). Fra dette har vi ved ved R1:
(7) |- η(x) & T;x(η(x)) → T;x(~T;x(~~α) ↔ ~T;x(α)) Ved hjelp av punkt (iii) i Elementærteorem 2 følger herav:

(8) |- η(x) & T;x(η(x)) → T;x(~T;x(~~α)) ↔ T;x(~T;x(α)) Ved setningslogikk har man herav: (9) |- η(x) & T;x(η(x)) → T;x(~T;x(~~α)) ↔ ~~T;x(~T;x(α)) Ved hjelp av definisjonen av CT følger herav (2).

Vi tar dernest for oss (3): Vi har nå bevist i og med at vi har bevist (2) at
(10) |- d;1(x) →. T;x(CT;x(~α)) ↔ ~CT;x(T;x(α)). Herav har vi ved hjelp av setningslogikk: (11) |- d;1(x) →. ~T;x(CT;x(~α)) ↔ CT;x(T;x(α)) Fra dette kan vi slutte ved hjelp av R1: (12) |- η(x) → T;x(d;1(x)) → T;x(~T;x(CT;x(~α)) ↔ CT;x(T;x(α))).
Ved hjelp av Lemma som vi tidligere har bevist og punkt (iii) i Elementærteorem 2 følger:
(13) |- d;2(x) →. T;x(~T;x(CT;x(~α))) ↔ T;x(CT;x(T;x(α))). Herav ved setningslogikk:
(14) |- d;2(x) →. ~T;x(CT;x(T;x(α)))↔ ~T;x(~T;x(CT;x(~α))) . Ved hjelp av definisjonen av CT: (15) |- d;2(x) →. ~T;x(CT;x(T;x(α)))↔ CT;x(T;x(CT;x(~α))). Herav kan vi ved hjelp av R1 slutte:
(16) |- η(x) &T;x(d;2(x)) → T;x(~T;x(CT;x(T;x(α)))↔ CT;x(T;x(CT;x(~α))))
Ved nok en gang å anvende punkt (iii) i elementærteorem 2 følger herav:
(17) |- η(x) &T;x(d;2(x)) → T;x(~T;x(CT;x(T;x(α))))↔ T;x(CT;x(T;x(CT;x(~α)))). Ved setningslogikk og tidligere bevist lemma:
(18) |- d;3(x) → ~~T;x(~T;x(CT;x(T;x(α))))↔ T;x(CT;x(T;x(CT;x(~α)))). Herav har man så ved hjelp av definisjonen av C og punkt (i):
(19) |- η(x) & T;x(η(x)) → ~CT;x(T;x(CT;x(T;x(α))))↔ T;x(CT;x(T;x(CT;x(~α)))). Dette viser at (3) holder og dermed at (viii) holder.

Vi har nå gitt et fullstendig bevis for teoremet. **QED.**

§10 Om antallet modaliteter i Kη[B4,B5]

Definisjon: Med en modalitet av lengde n assosiert med variabeltegnet x forstår vi en sekvens av lengde n, <a;1,...,a;n> der a;j (1=< j =< n) enten er "T;x", "CT;x", "~" eller "*". * representerer nullmodaliteten, dvs. den modaliteten som når den anvendes på en formel gir formelen selv.

Er <a;1,...,a;n> en modalitet assosiert med variabelen x og α en formel, er *formelen som resulterer ved å anvende modaliteten <a;1,...,a;n> på formelen α*, som vi betegner med "<a; 1,...,a;n>(α)" følgende formel:

β = a;1(.... a;n-1(a;n(α))...)

Eksempel: Anta vi har for oss modaliteteten: <T;x,CT;x,CT;x, ~,~,T;x,~, CT;x> assosiert med variabeltegnet x. Denne modaliteten er som man ser av lengde 8. Formelen som resulterer når man anvender denne modaliteten på en formel α blir da:

β = T;x(CT;x(CT;x(~(~(T;x(~(CT;x(α))))))))

Definisjon: Er <a;1,...,a;n> og <b;1,...,b;m> to modaliteter assosiert med variabeltegnet x sier vi at de to modalitetene er *ekvivalente* i systemet S hvis og bare hvis vi har:

S |- η(x) & T;x(η(x)) →. a;1(.... a;n-1(a;n(α))...) ↔ b;1(.... b;m-1(a;m(α))...)

for en eller annen formel α.

Hovedresultatet i dette avsnittet er den følgende sats:

Teorem (Modalitetsteorem) Enhver modalitet av lengde n >=1 assosiert med variabeltegnet x er i kalkylen Kη[B4,B5] ekvivalent med en av de følgende fjorten modaliteter:

(i) <*>, <T;x>, <CT;x>, <T;x,CT;x>, <CT;x,T;x>, <T;x,CT;x, T;x>, <CT;x,T;x,CT;x>
(ii) <~>, <T;x,~>, <CT;x,~>, <T;x,CT;x, ~>, <CT;x,T;x,~>, <T;x,CT;x, T;x,~>, <CT;x,T;x,CT;x,~>[4]

Bevis: Satsen bevises ved induksjon lengden av modaliteter assosiert med variabeltegnet x.

Basistrinn: n=1. Er a en modalitet av lengde 1 har man at a enten er <*>, <~>, <T;x> eller <CT;x>. Siden disse allerede er på den listen over modaliteter som er angitt i teoremet følger det at de også er ekvivalente med dem som allerede er på listen.

Induksjonstrinn: Vi antar at satsen holder for alle modaliteter av lengde n og skal vise at den holder for alle modaliteter av lengde n+1. Anta <a;1,....,a;(n+1)> er en modalitet av lengde n +1. Da har vi, siden <a;2,...,a;n+1> er en modalitet av lengde n, at <a;2,...,a;n+1> må være ekvivalent med en av de fjorten modalitetene som er nevnt i teoremet. Dette følger fra induksjonshypotesen. I sin tur innebærer dette at det eneste vi trenger å vise er at dersom modaliteten a;1 settes foran en eller annen av modalitetene i (i) eller (ii) får vi en modalitet som enten allerede er blandt disse fjorten, eller en modalitet som er ekvivalent med en av disse fjorten. Det er fire muligheter når det gjelder a;1.

Tilfelle (a): a1 er nullmodaliteten. Da ser man at påstanden holder trivielt.

Tilfelle (b): a1 er modaliteten <~>. Føyes denne foran nullmodaliteten får man en modalitet som er ekvivalent med <~>. Føyes den foran noen av de andre modalitetene i rekke (i) i teoremet får man uten videre en modalitet som i kraft av utvekslingsteoremet er ekvivalent med en av modalitetene i rekke (ii). Føyes <~> foran noen av modalitetene i rekke (ii) får man en modalitet som er ekvivalent med nullmodaliteten i det første tilfellet. I de andre tilfelle får man modaliteter som er ekvivalente med modalitene i første rekke i kraft av utvekslingsteoremet.

Tilfelle (c). a1 er modaliteten <T;x>. Her er det nødvendig å se på de enkelte tilfellene i detalj. Setter man <T;x> for <*> får man den samme modaliteten. Setter man <T;x> foran <T;x> får man <T;x,T;x> som åpenbart i kraft av reduksjonsteoremet er ekvivalent med <T;x>. Setter man <T;x> foran <CT;x> får man åpenbart den neste modaliteten i rekke (i). Satsen holder derfor i dette tilfellet. Setter man <T;x> foran <T;x,CT;x> får man en modalitet som er ekvivalent med <T;x,CT;x> ved hjelp av reduksjonsteoremet. Setter man så <T;x> foran <CT;x,T;x> får man igjen den neste modaliteten i rekken. Setter man <T;x> foran <T;x,CT;x, T;x> får man en modalitet som i kraft av reduksjonsteoremet er ekvivalent med <T;x,CT;x, T;x>, og setter man den foran <CT;x,T;x,CT;x> får man

[4] Resultater av denne typen ble først bevist for en rekke modallogiske systemer av Oskar Becker. Se Becker[1]. Det beviset vi gir for vår sats følger mønsteret i Hughes og Cresswell [1], s 47- 49. for en tilsvarende sats for modallogikken S4. Det er altså ikke noe originalt ved bevisteknikken i beviset for denne satsen.

<T;x,CT;x,T;x,CT;x> som i lys av reduksjonsteoremet er ekvivalent med <T;x,CT;x> som allerede forekommer tidligere i rekken. På helt tilsvarende måte finner man at satsen holder om <T;x> settes foran noen av modalitetene i rekken (ii). I hvert tilfelle får man enten en modalitet som forekommer i rekken eller en som ved hjelp av reduksjonsteoremet er ekvivalent med en modalitet i denne rekken.

Tilfelle (d) a1 er modaliteten <CT;x>. Setter man <CT;x> for <*> får man den samme modaliteten. Setter man <CT;x> foran <T;x> får man <CT;x,T;x> som åpenbart er en modalitet senere i rekken. Setter man <CT;x> foran <CT;x> får man en modalitet som er ekvivalent med <CT;x>. Satsen holder derfor i dette tilfellet. Setter man <CT;x> foran <T;x,CT;x> får man en modalitet som igjen kommer senere i rekken. Setter man så <CT;x> foran <CT;x,T;x> er den resulterende modalitet ekvivalent med <CT;x,T;x> ifølge reduksjonsteoremet.. Setter man <CT;x> foran <T;x,CT;x, T;x> får man en modalitet som i kraft av reduksjonsteoremet er ekvivalent med <CT;x, T;x>, og setter man den foran <CT;x,T;x,CT;x> får man <CT;x,CT;x,T;x,CT;x> som i lys av reduksjonsteoremet er ekvivalent med <CT;x, T;x,CT;x> som allerede forekommer i rekken. På helt tilsvarende måte finner man at satsen holder om <CT;x> settes foran noen av modalitetene i rekken (ii). I hvert tilfelle får man enten en modalitet som forekommer i rekken eller en som ved hjelp av reduksjonsteoremet er ekvivalent med en modalitet i denne rekken.

Man ser at satsen holder for alle modaliteter av lengde n+1 om den holder for modaliteter av lengde n. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED.**

I kalkylen Kη[B4,B5] kan man utlede de to siste formlene på listen vi presenterte tidligere, nemlig B11 og B12. Disse to formlene kan man vise at ikke lar seg utlede i Kη, men vi skal ikke gjøre det her siden vi ikke i dette skrift har presentert noen modellteori for kalkylen Kη. Man har:

Teorem: Kη[B4, B5] |- B11 & B12

Bevis:

(a) Vi viser først at B11 kan utledes. Ved hjelp av A1 har man ved substitusjon og setningslogikk: (1) |- η(x) → T;x(T;x(α)& ~α) → T;x(T;x(α)) & T;x(~α). Fra dette følger ved hjelp av B5 og ren setningslogikk:
(2) |- η(x) → T;x(T;x(α)& ~α) → T;x(α) & T;x(~α). Ved substitusjon i A1 har man videre
(3) |- η(x) →. T;x(α)&T;x(~α) ↔ T;x(a&~α). Fra dette og (2) følger:
(4) |- η(x) → T;x(T;x(α)& ~α) → T;x(α&~α). Men fra dette og A2 følger ved hjelp av setningslogikk det vi ønsker, nemlig: |- η(x) → ~T;x(T;x(α)& ~α).

(b) Vi viser så at B12 kan utledes i Kη[B4, B5]. Ved substitusjon i A2 har man:
(5) |- η(x) →. T;x(α & ~T;x(α)) ↔ T;x(α) & T;x(~T;x(α)). Fra aksiom B4 følger ved hjelp av ren setningslogikk: (6) |- η(x) → T;x(α) & T;x(~T;x(α)) → T;x(T;x(α)) & T;x(~T;x(α))
Ved hsubstitusjon i A1 har man at det følgende holder:
(7) |- η(x) → T;x(T;x(α)) & T;x(~T;x(α)) ↔ T;x(T;x(α)& ~T;x(α))
Ved substitusjon i A2 har man dessuten (8) |- η(x) → ~ T;x(T;x(α)& ~T;x(α)). Men fra (5), (6), (7) og (8) følger rent setningslogisk det vi ønsker, nemlig: |- η(x) →. ~T;x(α & ~T;x(α))
QED.

Moore synes å ha vært den første som pekte på den tilsynelatende selvmotsigelsen som en person gjør seg skyldig i som i fullt alvor ytrer "Det regner, men jeg tror det ikke". Hvis x betegner den personen det dreier seg om, og α representerer setningen "Det regner", kan ytringen formaliseres slik: "α&~T;x(α)". Men hvis x faktisk ytrer denne setningen synes det å

være et uttrykk for at han tror den er riktig. Man må da ha T;x(α & ~T;x(α)). Som man ser fra teoremet ovenfor er dette utelukket hvis x er en person med det vi har kalt et rasjonelt organisert trosfelt og vi forutsetter at B4 representerer et gyldig prinsipp.

Derimot synes ikke Moore å ha drøftet hvorvidt en person som sier "Det regner ikke, men jeg tror at det regner" motsier seg selv. Føler man at B5 er et like gyldig prinsipp som B4 virker dette nesten like merkverdig. Det virker imidlertid ikke som om man kan utlede B5 fra B4, og det er derfor trolig at man ikke kan utlede setningen η(x)→ ~T;x(T;x(α)& ~α) i kalkylen Kη[B4]. Antageligvis må man legge til B5 eller et sterkere prinsipp for å nå frem til denne konklusjon. [5]

Det at skjemata av typen T;x(T;x(α)& ~α) og T;x(α & ~T;x(α)) virker forunderlige gir en slags indirekte støtte til prinsipper som B11 og B12. Men siden disse kan utledes fra henholdvis B5 og B4 kan man også si at disse blir bekreftet.

Man kan bevise en sats som er relatert til den ovenfor vedrørende B11. Den satsen vi har i tankene er:

Teorem: Kη[B4] |- η(x) & T;x(η(x)) → ~T;x(T;x(α) & ~α))

Bevis: Ved substitusjon i A1 har man:

(1) |- η(x) →. T;x(T;x(α) & ~α)) ↔ T;x(T;x(α)) & T;x(~α)

Ved substisjon i B4 følger: (2) η(x) →. T;x(~α) → T,x(T;x(~α)) Fra (1) og (2) følger ved hjelp av ren setningslogikk:

(3) |- η(x) →. T;x(T;x(α) & ~α)) ↔ T;x(T;x(α)) & T;x(T;x(~α))

Ved hjelp av Iterasjonsteorem 1 har man:

(4) |- η(x)& T;x(η(x)) →. T;x(T;x((α & ~α))) ↔ T;x(T;x(α)) & T;x(T;x(~α))

Fra dette og (3) kan man slutte ved hjelp av ren setningslogikk:

(5) |- η(x)& T;x(η(x)) →. T;x(T;x((α & ~α))) ↔ T;x(T;x(α) & ~α)

Fra punkt (iii) i Iterasjonsteorem 3 følger:

(6) |- η(x) &T;x(η(x)) → ~ T;x(T;x((α & ~α)))

Fra (5) og (6) følger så det vi ønsker: |- η(x) & T;x(η(x)) → ~T;x(T;x(α) & ~α)). **QED.**

Som et korollar til teoremet ovenfor har man:

Korollar: Kη[B1,B4] |- η(x) → ~T;x(T;x(α) & ~α))

Bevis: Fra B1 følger nesten umiddelbart ved hjelp av setningslogikk:
(1) |- η(x) ↔ (η(x) & T;x(η(x)). Fra dette og forrige teorem har vi så ved hjelp av setningslogikk: |- η(x) → ~T;x(T;x(α) & ~α)). **QED.**

§11 Endel bemerkninger om skjemaene B6 - B10

Vi har ovenfor kommentert de fem første og de to siste av skjemaene på listen B1- B12. Det gjenstår imidlertid å si noe om skjemaene B6- B12, dvs de følgende skjemata:

B6 η(x) → T;x(T;x(α) → α)
B7 η(x) →. T;x(α →T;x(α))
B8 η(x) → T;x(α ↔ T;x(α))

[5] En utførlig, opplysende og dyptgående drøfting av Moores paradox finner man i Hintikka [1], side 64 -102.

B9 $\eta(x) \rightarrow T;x(\alpha) \vee T;x(\sim\alpha)$
B10 $\eta(x) \rightarrow T;x(T;x(\alpha) \vee T;x(\sim\alpha))$

Har man den intuitive tolkningen av operatoren T;x i tankene, og også fastholder den betydning vi har tillagt predikatet η, dvs. tolker "T;x(α)" som " x tror at α" og "η(x)" som "x er en person hvis trosfelt er rasjonelt organisert", virker det som om ingen av disse formlene er særlig plausible. Når det gjelder for eksempel B6 uttrykker denne formelen at dersom trosfeltet til x er rasjonelt organisert så er det slik at x faktisk tror at dersom han tror at α er tilfelle så er α faktisk tilfelle. Er dette plausibelt? Er det virkelig noen grunn til å tro at en rasjonell person tror at hvis han tror at jorden er flat så er jorden flat og hvis han tror at han kan hoppe høyere enn to meter så kan han hoppe høyere enn to meter? Dette virker mildt sagt tvilsomt. Det er nærliggende å trekke konkludere med at B6 bør regnes som en ugyldig formel for enhver rimelig definisjon av hva som kan menes med en gyldig formel i L.

Like tvilsomt virker skjemaet B7. Dette sier at dersom x er en person hvis trosfelt er rasjonelt organisert, så er det slik at x tror at hvis α er tilfelle så er det også slik x tror at α er tilfelle. Men det er intet i ved definisjonen av rasjonelt organisert trosfelt som innebærer at alle kondisjonalutsagn av typen $\alpha \rightarrow T;x(\alpha)$ skulle være med i trosfeltet til en person hvis trosfelt faktisk er rasjonelt organisert.

Et argument mot B7 er at den impliserer at en hver matematiker x med et rasjonelt organisert trosfelt må tro begge de følgende påstander:

(i) Hvis Goldbachs gjetning er riktig så tror x at Goldbachs gjetning er riktig
(ii) Hvis det ikke er slik at Goldbachs gjetning er riktig så tror x at det ikke er slik at Goldbachs gjetning er riktig

Fra dette følger at (iii) x enten tror at Goldbachs gjetning er riktig eller x tror at Goldbachs gjetning ikke er riktig. Men det er absolutt intet som tilsier at en rasjonell person x på noen måte skulle tro (iii). En rasjonell person x kan være overbevist om at han hverken tror at den nevnte gjetning er riktig eller at den er uriktig. Det virker derfor som om det skulle være fullt mulig å tenke seg en person x som har et rasjonelt organisert trosfelt, men der det likevel er tilfelle at $T;x(\sim T;x(\beta) \,\&\, \sim T;x(\sim\beta))$ for en eller annen formel β. Konklusjonen er altså at B7 er ytterst uplausibel.

Man ser raskt at skjemaet B8 impliserer skjemaene B6 og B7. Det kan derfor ikke være mye som i og for seg taler til fordel for B8. En annen grunn til å forkaste B8 som et seriøst forslag til aksiomskjema i doxastisk logikk er at B8 visker ut alle "doxastiske distinksjoner" innenfor området til operatoren T;x. Utvider man Kη med B8 som et nytt aksiomskjema kan man for eksempel lett utlede som et teorem: $\eta(x) \rightarrow T;x(\alpha \leftrightarrow CT;x(\alpha))$. Videre kan man utlede for eksempel: $\eta(x) \rightarrow T;x(T(n);x(\alpha) \leftrightarrow \alpha)$.

Når det gjelder forholdet mellom B6 og B7 og de formlene vi tidligere har nevnt ser man lett at B6 impliserer B5 og B7 impliserer B4. Men selvom B4 og B5 ikke virker åpenbart gale taler ikke dette spesielt til fordel for B6 og B7, langt mindre taler det til fordel for B8.

Også B9 viker umiddelbart uplausibel fordi den impliserer at enhver person med et rasjonelt trosfelt altid tror en en påstand eller tror dens negasjon. Påstanden utelukker den tredje muligheten at en rasjonell person x hverken behøver å tro at β eller å tro at $\sim\beta$. Med andre er det fullt mulig at man kan ha en x der $\eta(x) \,\&\, \sim T;x(\beta) \,\&\, \sim T;x(\sim\beta)$.

Den eneste grunnen vi har for å ta med denne formelen, B9 på listen er at det tross alt kan være interessant å se på hva som formalt følger fra den når den legges til et mer plausibelt system som for eksempel Kη-, Kη, eller Kη utvidet med B2-B5. Den samme bemerkning kan gjøres i forbindelse med de andre fire skemaene på listen ovenfor.

Vi skal nå avslutningsvis gi bevis for endel satser som kaster et visst lys over formlene B6 -B10 og deres innbyrdes forhold:

Teorem. Vi har at de følgende formler er teoremer i Kη[B8]:

(i) $\eta(x) \rightarrow .\ T;x(T;(\alpha) \rightarrow \alpha)$
(ii) $\eta(x) \rightarrow .\ T;x(\alpha \rightarrow T;x(\alpha))$
(iii) $\eta(x) \rightarrow .\ T;x(\alpha) \rightarrow T;x(T;x(\alpha))$
(iv) $\eta(x) \rightarrow .\ T;(T;(\alpha)) \rightarrow T;x(\alpha)$
(v) $\eta(x) \rightarrow .\ T;x(T;x(\alpha) v\ T;x(\sim\alpha))$
(vi) $\eta(x) \rightarrow .\ T;x(\alpha \leftrightarrow CT;x(\alpha))$
(vii) $\eta(x) \rightarrow .\ T;x(T;x(\alpha) \leftrightarrow CT;x(\alpha))$
(viii) $\eta(x) \rightarrow .\ T;x(\alpha \leftrightarrow Q(n);x(\alpha))$ $(n >= 1)$

Bevis: *Ad (i):* Vi har ved hjelp av setningslogikk at (1) $\vdash (\alpha \leftrightarrow T;x(\alpha)) \rightarrow (T;x(\alpha) \rightarrow \alpha)$. Herav følger så ved hjelp av R2

(2) $\vdash \eta(x) \rightarrow .\ T;x(\alpha \leftrightarrow T;x(\alpha)) \rightarrow T;x(T;x(\alpha) \rightarrow \alpha)$

Men siden B8 er et aksiomskjema i foreliggende system har vi: $\vdash \eta(x) \rightarrow .\ T;x(\alpha \leftrightarrow T;x(\alpha))$ Fra dette og (2) følger ved setningslogikk det vi ønsker. $\vdash \eta(x) \rightarrow .\ T;x(T;x(\alpha) \rightarrow \alpha)$. Dette viser at punkt (i) holder.

Ad (ii): Vi har ved hjelp av setningslogikk at (1) $\vdash (\alpha \leftrightarrow T;x(\alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow T;x(\alpha))$. Herav følger så ved hjelp av R2

(2) $\vdash \eta(x) \rightarrow .\ T;x(\alpha \leftrightarrow T;x(\alpha)) \rightarrow T;x(\alpha \rightarrow T;x(\alpha))$

Men siden B8 er et aksiomskjema i foreliggende system har vi: $\vdash \eta(x) \rightarrow .\ T;x(\alpha \leftrightarrow T;x(\alpha))$ Fra dette og (2) følger ved setningslogikk det vi ønsker. $\vdash \eta(x) \rightarrow .\ T;x(\alpha \rightarrow T;x(\alpha))$. Dette viser at punkt (ii) holder.

Ad (iii): Ved hjelp av punkt (i) i Elementærteorem 2 har vi:
(1) $\vdash \eta(x) \rightarrow .\ T;x(\alpha \rightarrow T;x(\alpha)) \rightarrow T;x(\alpha) \rightarrow T;x(T;x(\alpha))$. Fra dette og resultatet under punkt (ii) følger ved hjelp av setningslogikk: $\eta(x) \rightarrow .\ T;x(\alpha) \rightarrow T;x(T;x(\alpha))$ Dette er hva vi ønsker.

Ad (iv): Ved hjelp av punkt (i) i Elementærteorem 2 har vi:
(1) $\vdash \eta(x) \rightarrow .\ T;x(T;x(\alpha) \rightarrow \alpha) \rightarrow (\ T;x(T;x(\alpha)) \rightarrow T;x(\alpha))$. Fra dette og resultatet under punkt (i) følger ved hjelp av setningslogikk: $\eta(x) \rightarrow .\ T;x(T;x(\alpha)) \rightarrow T;x(\alpha)$ Dette er hva vi ønsker.

Ad (v): Vi har ved hjelp av punkt (ii): (1) $\vdash \eta(x) \rightarrow .\ T;x(\alpha \rightarrow T;x(\alpha))$. Ved substitusjon får vi da: (2) $\vdash \eta(x) \rightarrow .\ T;x((\sim\alpha) \rightarrow T;x(\sim\alpha))$. Nå har man ved hjelp av ren setningslogikk: (3) $\vdash (\alpha \rightarrow T;x(\alpha)) \ \&\ ((\sim\alpha) \rightarrow T;x(\sim\alpha)) \rightarrow T;x(\alpha)\ v\ T;x(\sim\alpha)$
Herav følger så ved hjelp av punkt (a) i Elementærteorem 1:

(4) $\vdash \eta(x) \rightarrow .\ T;x(\alpha \rightarrow T;x(\alpha)) \ \&\ T;x((\sim\alpha) \rightarrow T;x(\sim\alpha)) \rightarrow T;x(T;x(\alpha)\ v\ T;x(\sim\alpha))$

Fra dette, (1) og (4) følger så ved hjelp av ren setningslogikk det vi ønsker, nemlig:
(5) $\vdash \eta(x) \rightarrow .\ T;x(T;x(\alpha) v\ T;x(\sim\alpha))$. Dette viser at punkt (v) holder.

Ad (vi): Ved substitusjon i B8 har vi:
(1) $\vdash \eta(x) \rightarrow\ T;x((\sim\alpha) \leftrightarrow T;x(\sim\alpha))$. Nå har man som et setningslogisk teorem:
(2) $\vdash ((\sim\alpha) \leftrightarrow T;x(\sim\alpha)) \leftrightarrow (\alpha \leftrightarrow \sim T;x(\sim\alpha))$. Fra dette følger ved hjelp av regelen R3:
(3) $\vdash \eta(x) \rightarrow .\ T;x((\sim\alpha) \leftrightarrow T;x(\sim\alpha)) \leftrightarrow T;x(\alpha \leftrightarrow \sim T;x(\sim\alpha))$. Herav har man så ved hjelp av (1) og setningslogikk: (4) $\vdash \eta(x) \rightarrow .\ T;x(\alpha \leftrightarrow \sim T;x(\sim\alpha))$. Ved hjelp av definisjonen av CT følger så det vi ønsker: $\vdash \eta(x) \rightarrow .\ T;x(\alpha \leftrightarrow CT;x(\alpha))$. Dette viser at punkt (vi) holder.

Ad (vii): Siden B8 er et aksiomskjema har vi (1) $\vdash \eta(x) \rightarrow\ T;x(\alpha \leftrightarrow T;x(\alpha))$. Fra punkt (vi) har vi: (2) $\vdash \eta(x) \rightarrow .\ T;x(\alpha \leftrightarrow CT;x(\alpha))$. Ved hjelp av ren setningslogikk har man: (3) $\vdash (\alpha \leftrightarrow T;x(\alpha)) \ \&\ (\alpha \leftrightarrow CT;x(\alpha)) \rightarrow (T;x(\alpha) \leftrightarrow CT;x(\alpha))$. Herav følger så ved hjelp av punkt (a) i Elementærteorem 1:

(4) $\vdash \eta(x) \rightarrow T;x\ (\alpha \leftrightarrow T;x(\alpha)) \ \&\ T;x(\alpha \leftrightarrow CT;x(\alpha)) \rightarrow T;x(T;x(\alpha) \leftrightarrow CT;x(\alpha))$

Fra (1),(2) og (4) følger ved hjelp av ren setningslogikk det vi ønsker:
$\eta(x) \rightarrow T;x(T;x(\alpha) \leftrightarrow CT;x(\alpha))$. Dette viser at punkt (vii) holder.

Ad (viii): Satsen bevises ved induksjon på n.

Basistrinn: n=1. Da har vi at $Q(1);x(\alpha)$ enten er $T;x(\alpha)$ eller $CT;x(\alpha)$. I det første tilfelle har vi ved hjelp av B8:

$\vdash \eta(x) \rightarrow T;x(\alpha \leftrightarrow T;x(\alpha))$ og derfor $\vdash \eta(x) \rightarrow T;x(\alpha \leftrightarrow Q(1);x(\alpha))$

I det andre tilfelle har vi ved hjelp av punkt (vi) at $\vdash \eta(x) \rightarrow. T;x(\alpha \leftrightarrow CT;x(\alpha))$ og derfor at $\vdash \eta(x) \rightarrow T;x(\alpha \leftrightarrow Q(1);x(\alpha))$. Satsen holder altså i begge tilfelle.

Induksjonstrinn: Vi antar satsen holder for n, det vil si at:

(1) $\vdash \eta(x) \rightarrow. T;x(\alpha \leftrightarrow Q(n);x(\alpha))$ Vi skal vise at den holder for n+1. Vi har etter definisjonen av operasjonen Q at $Q(n+1);x(\alpha)$ enten er $T;x(Q(n);x(\alpha))$ eller $CT;x(Q(n);x(\alpha))$. Tilfelle (i): (2) $Q(n+1);x(\alpha) = T;x(Q(n);x(\alpha))$. Ved substitusjon i B8 har man: (3) $\vdash \eta(x) \rightarrow T;x(Q(n);x(\alpha) \leftrightarrow T;x(Q(n);x(\alpha))$. Nå har vi ved ren setningslogikk:

(4) $\vdash (\alpha \leftrightarrow Q(n);x(\alpha)) \ \& \ (Q(n);x(\alpha) \leftrightarrow T;x(Q(n);x(\alpha)) \rightarrow (\alpha \leftrightarrow T;x(Q(n);x(\alpha))$

Fra dette kan vi videre slutte ved hjelp av punkt (a) i Elementærteorem 1 :

(5) $\vdash \eta(x) \rightarrow T;x(\alpha \leftrightarrow Q(n);x(\alpha)) \ \& \ T;x(Q(n);x(\alpha) \leftrightarrow T;x(Q(n);x(\alpha)) \rightarrow T;x(\alpha \leftrightarrow T;x(Q(n);x(\alpha))$

Fra (1), (3) og (5) følger så : $\eta(x) \rightarrow T;x(\alpha \leftrightarrow T;x(Q(n);x(\alpha))$. Herav har vi så ved hjelp av (2) at: : $\eta(x) \rightarrow T;x(\alpha \leftrightarrow Q(n+1);x(\alpha))$ som er det vi ønsker.

Tilfelle (ii): (6) $Q(n+1);x(\alpha) = CT;x(Q(n);x(\alpha))$. Ved substitusjon i punkt (vi) har man: (7) $\vdash \eta(x) \rightarrow T;x(Q(n);x(\alpha) \leftrightarrow CT;x(Q(n);x(\alpha))$. Nå har vi ved ren setningslogikk:

(8) $\vdash (\alpha \leftrightarrow Q(n);x(\alpha)) \ \& \ (Q(n);x(\alpha) \leftrightarrow CT;x(Q(n);x(\alpha)) \rightarrow (\alpha \leftrightarrow CT;x(Q(n);x(\alpha))$

Fra dette kan vi videre slutte ved hjelp av punkt (a) i Elementærteorem 1 :

(9) $\vdash \eta(x) \rightarrow T;x(\alpha \leftrightarrow Q(n);x(\alpha)) \ \& \ T;x(Q(n);x(\alpha) \leftrightarrow CT;x(Q(n);x(\alpha)) \rightarrow T;x(\alpha \leftrightarrow CT;x(Q(n);x(\alpha))$

Fra (1), (7) og (9) følger så : $\eta(x) \rightarrow T;x(\alpha \leftrightarrow CT;x(Q(n);x(\alpha))$. Herav har vi så ved hjelp av (2) at: : $\eta(x) \rightarrow T;x(\alpha \leftrightarrow Q(n+1);x(\alpha))$ som er det vi ønsker. Dette viser at punkt (viii) holder.

Dermed har vi gitt ett fullstendig bevis for satsen. **QED.**

Vi skal også bevise den følgende sats:

Teorem (Reduksjonsteorem 2) Vi har at de følgende formler er teoremer i $K\eta$[B8]:

(i) $\eta(x) \rightarrow. T;x(T;x(\alpha)) \leftrightarrow T;x(\alpha)$
(ii) $\eta(x) \rightarrow. CT;x(CT;x(\alpha)) \leftrightarrow CT;x(\alpha)$
(iii) $\eta(x) \rightarrow T;x(CT;x(\alpha)) \leftrightarrow T;x(\alpha)$
(iv) $\eta(x) \rightarrow CT;x(T;x(\alpha)) \leftrightarrow CT;x(\alpha)$

Bevis: *Ad (i)*: Dette følger ved hjelp av ren setningslogikk fra punkt (iii) og (iv) i det foregående teorem.

Ad (ii): Dette følger fra punkt (v) i Reduksjonsteorem 1 siden teoremet ovenfor viser at B4 og B5 er utledbare i $K\eta$[B8].

Ad (iii): Fra punkt (vi) i det forrige teoremet og (iii) i Elementærteorem 2 kan vi slutte at dette holder.

Ad (iv): Ved substitusjon i punkt (iii) rett ovenfor har vi:
(1) $\eta(x) \rightarrow T;x(CT;x(\sim\alpha)) \leftrightarrow T;x(\sim\alpha)$. Fra dette har vi ved hjelp av setningslogikk:
(2) $\eta(x) \rightarrow \sim T;x(CT;x(\sim\alpha) \leftrightarrow \sim T;x(\sim\alpha)$. Ved hjelp av utvekslingsteoremet har man:
(3) $\eta(x) \rightarrow T;x(CT;x(\sim\alpha) \leftrightarrow \sim CT;x(T;x(\alpha))$. Fra dette, (2) og definisjonen av CT følger det vi ønsker: $\eta(x) \rightarrow CT;x(T;x(\alpha)) \leftrightarrow CT;x(\alpha)$.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED.**

Det følgende teorem om modaliteter har også en viss interesse:

Teorem (Modalitetsteorem 2) Enhver modalitet av lengde n >=1 assosiert med variabeltegnet x er i kalkylen Kη[B8] ekvivalent med en av de følgende seks modaliteter:

(i) <*>, <~> ,<T;x>, <CT;x>, <T;x, ~>, <CT;x, ~>

Bevis: Satsen bevises ved induksjon lengden av modaliteter assosiert med variabeltegnet x Basistrinn: n=1. Er a en modalitet av lengde 1 har man at a enten er <*>, <~>, <T;x> eller <CT;x>. Siden disse allerede er på den listen over modaliteter som er angitt i teoremet følger det at de også er ekvivalente med dem som står på listen.

Induksjonstrinn: Vi antar at satsen holder for alle modaliteter av lengde n og skal vise at den holder for alle modaliteter av lengde n+1. Anta <a;1,....,a;(n+1)> er en modalitet av lengde n +1. Da har vi, siden <a;2,...,a;n+1> er en modalitet av lengde n, at <a;2,...,a;n+1> må være ekvivalent med en av de seks modalitetene som er nevnt i teoremet. Dette følger fra induksjonshypotesen. I sin tur innebærer dette at det eneste vi trenger å vise er at dersom modaliteten a;1 settes foran en eller annen av modalitetene i (i) eller (ii) får vi en modalitet som enten allerede er blandt disse seks, eller en modalitet som er ekvivalent med en av disse fjorten. Det er fire muligheter når det gjelder a;1.

Tilfelle (a): a1 er nullmodaliteten. Da ser man at påstanden holder trivielt.

Tilfelle (b): a1 er modaliteten <~>. Føyes denne foran nullmodaliteten får man en modalitet som er ekvivalent med <~>. Føyes den foran noen av de andre modalitetene i rekken (i) i teoremet får man uten videre en modalitet som i kraft av utvekslingsteoremet er ekvivalent med en av modalitetene i rekken (i) i kraft av utvekslingsteoremet.

Tilfelle (c). a1 er modaliteten <T;x>. Her er det nødvendig å se på de enkelte tilfellene i detalj. Setter man <T;x> for <*> får man den samme modaliteten. Setter man <T;x> foran <T;x> får man <T;x,T;x> som åpenbart i kraft av Reduksjonsteorem 2 er ekvivalent med <T;x>. Setter man <T;x> foran <CT;x> får man igjen ifølge Reduksjonsteorem 2 en modalitet som er ekvivalent med <T;x>. Settes <T;x> foran <T;x,~> får man <T;x,T;x,~> som åpenbart i kraft av Reduksjonsteorem 2 er ekvivalent med <T;x,~>. Setter man endelig <T;x> foran <CT;x, ~> får man <T;x,CT;x,~> som er ekvivalent med <T;x, ~>. Satsen holder derfor i dette tilfellet.

Tilfelle (d) a1 er modaliteten <CT;x>. Her er det igjen nødvendig å se på de enkelte tilfellene i detalj. Setter man <CT;x> for <*> får man den samme modaliteten. Setter man <CT;x> foran <T;x> får man <CT;x,T;x> som åpenbart i kraft av Reduksjonsteorem 2 er ekvivalent med <CT;x>. Setter man <CT;x> foran <CT;x> får man igjen ifølge Reduksjonsteorem 2 en modalitet som er ekvivalent med <CT;x>. Settes <CT;x> foran <T;x,~> får man <CT;x,T;x,~> som åpenbart i kraft av Reduksjonsteorem 2 er ekvivalent med <CT;x,~>. Setter man endelig <CT;x> foran <CT;x, ~> får man <CT;x,CT;x,~> som er ekvivalent med <CT;x, ~>. Satsen holder derfor i dette tilfellet.

Man ser at satsen holder for alle modaliteter av lengde n+1 om den holder for modaliteter av lengde n. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED.**

Teorem: Man har at systemet Kη[B8] er inkludert i systemet Kη[B4,B5, B9], med andre ord har man for alle formler α i L:

Kη[B8] |- α → Kη[B4,B5,B9] |- α

Bevis: Det vil være tilstrekkelig å vise at B8, ie η(x)→ T;x(α↔T;x(α)) kan utledes i Kη[B4,B5,B9]. Nå har vi ved hjelp av resultatene i forrige paragraf,at B11 og B12 kan utledes i Kη[B4,B5, B9]. Derfor:

(1) |- η(x) → ~T;x(T;x(α) & ~α)

(2) |- η(x) → ~T;x(α & ~T;x(α))

Ved substitusjon i B9 følger:

(3) |- η(x) → T;x(T;x(α) & ~α) v T;x(~(T;x(α) & ~α)) Fra dette følger:

(4) |- η(x) → (~T;x(T;x(α) & ~α)) → T;x(~(T;x(α) & ~α)))

Fra dette og (1) og (4) følger ved hjelp av ren setningslogikk:

(5) |- η(x)→ T;x(~(T;x(α) & ~α))

Nå har vi som et rent setningslogisk teorem: (6) |- ~(T;x(α) & ~α)) → (T;x(α)→ α)

Fra (6) kan man slutte ved hjelp av R1:

(7) η(x) → T;x(~(T;x(α) & ~α))) → T;x(T;x(α)→ α)

Fra dette og (5) følger rent setningslogisk:

(8) η(x) → T;x(T;x(α)→ α)

Ved substitusjon i B9 har vi også:

(9) |- η(x) → T;x(α & ~T;x(α)) v T;x(~(α & ~T;x(α))) Herav, ved setningslogikk:

(10) |- η(x) → (~T;x(α & ~T;x(α))) → T;x(~(α & ~T;x(α)))

Fra dette og (2) følger: (11) |- η(x) → T;x(~(α & ~T;x(α)))

Som et rent setningslogisk teorem har man: (12) (~(α & ~T;x(α))) → (α→T;x(α)). Herav følger ved hjelp av R1: (13) η(x) → T;x(~(α & ~T;x(α))) → T;x(α→T;x(α)). Fra dette og (11) følger ved hjelp av ren setningslogikk: (14) η(x) → T;x(α→T;x(α)). Nå har man: (15) |- (T;x(α)→ α) & (α→T;x(α)) → (α↔T;x(α)). Fra dette og punkt(a) i Elementærteorem 1 kan man slutte:

(16) |- η(x) →: T;x(T;x(α)→ α) & T;x(α→T;x(α)). → T;x(α↔T;x(α)).

Men fra dette, (8) og (14) følger ved setningslogikk det vi ønsker det vi ønsker: η(x)→ T;x(α↔T;x(α)). Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED.**

Det som var hensikten med dette skrift, nemlig å gi et relativt utførlig bilde av de formler som rent syntaktisk kan utledes i kalkylen Kη, og kalkyler som er beslektet med denne, er et projekt som på dette punkt i det vesentlige er fullført.

§12 Avslutning

Som avslutning kan det være på sin plass å nevne endel momenter som kan sette det vi har gjort ovenfor inn i et videre perspektiv.

I kalkylene Kη og Kη- er "x tror at α" en primitiv konstruksjon. Kη er altså en teori om tro. Det ville imidlertid ikke være noe i veien for å formulere en helt tilsvarende teori om viten. Man kunne da innføre konstruksjonen "x vet at α", forkortet med "V;x(α)", og adoptere alle de aksiomskjemaene og slutningsreglene som inngår i Kη bortsett fra at "T;x" i alle disse aksiomskjemata og slutningsregler erstattes med "V;x". Naturligvis må nå predikatet "η(x)" omtolkes. I denne sammenheng må det leses slik: "Mengen av alle de utsagn som beskriver forhold x vet er tilfelle inneholder alle logisk sanne utsagn, er konsistent og er lukket under logisk konsekvens og endelig konjunksjon". Gitt disse forandringene vil naturligvis alle

aksiomskjemaene og slutningsreglene i Kη vedbli å være gyldige. Men systemet vil åpenbart være ufullstendig siden det som svarer til formelen "V;x(α) → α" ikke er noe aksiomskjema i den doxastiske logikken vi har arbeidet med ovenfor. Det er altså i høyeste grad rimelig å legge til dette som et eget, nytt, aksiomskjema. Dette er jo også det vanlige i epistemisk logikk.
Lignende kalkyler kan formuleres så og si ved hjelp av et pennestrøk for andre intensjonale konstruksjoner av epistemisk karakter, for eksempel "x ser at α er tilfelle", "x hører at α er tilfelle", " x husker at α er tilfelle", og en rekke lignende konstruksjoner av epistemisk-doxastisk karakter. Imidlertid må det understrekes at dersom man tolker "T;x(α)" som for eksempel "x hører at α er tilfelle" i kalkylen Kη så må også predikatet "η(x)" omtolkes. Predikatet må i denne nye sammenhengen leses: "Mengen av alle de utsagn som beskriver forhold x hører er tilfelle inneholder alle logisk sanne utsagn, er konsistent og er lukket under logisk konsekvens og endelig konjunksjon". Som i foregående tilfelle vil da alle aksiomene og slutningsreglene fortsatt være gyldige. I tillegg må man regne skjemaet T;x(α)→ α som gyldig om T;x(α) tolkes som "x hører at α". Det virker som en ubestridelig sannhet at dersom x hører at α er tilfelle, for eksempel at Jensen nærmer seg ham i mørket, så er det slik at α, dvs. at Jensen nærmer seg ham i mørket.

Det er også et annet moment som det er nærliggende å kommentere. I stedet for å ha innført konstruksjonen "x tror at α" som primitivt begrep i kalkylen Kη, kunne vi ha innført den mer kompliserte konstruksjonen "x tror ved tidspunktet t at α er tilfelle" som man passende kunne forkorte med "T;(x,t)(α)". Som bekjent kan systemet av ens trosforestillinger, det vil si mengden av alle de utsagn som beskriver forhold man tror foreligger, endre seg over tid. Noe jeg trodde var tilfelle for fem minutter siden, eller fem måneder siden, eller fem år siden, behøver jeg ikke å tro at er tilfelle nå.

Istedet for å skrive "T;x(α)" kunne vi altså overalt ha skrevet "T;(x,t)(α)". Det ville da vært nødvendig å erstatte det monadiske predikatet "η(x)", med et helt tisvarende dyadisk predikat "η(x,t)". Dette siste måtte i så fall leses : "Mengen av alle de utsagn som beskriver forhold x hører er tilfelle ved tidspunktet t inneholder alle logisk sanne utsagn, er konsistent og er lukket under logisk konsekvens og endelig konjunksjon". Gjør man disse endringene holder fremdeles alle de teoremene vi har formulert og bevist, men formuleringen av dem blir noe mer komplisert. Hadde vi valgt denne fremgangsmåten ville det også ha vært naturlig å innføre noen predikater som gjør det mulig å omtale tidsforhold, som for eksempel predikatet "x er et tidspunkt" og "x er et tidspunkt som kommer før tidspunktet y". Dette vil komplisere teorien ytterligere. Vi har valgt å se bort fra slike komplikasjoner for tydeligere å få frem noen mer grunnleggende trekk ved logikken til trosbegrepet.

Studerer man logikken Kη er den ikke nødvendigvis ufullstendig. Dette kommer i noen grad an på hva slags kriterium for fullstendighet det er man benytter. Hvis man tolker T;x(α)" som "Utsagnet at α beskriver et forhold x tror at foreligger" kan T sies å representere en relasjon mellom en person og et utsagn. Er nå x og y objekter der man har at x = y er det nærliggende å tenke seg at utsagnet at x = y er et nødvendig sant utsagn, med andre ord at det er en logisk sannhet. Forutsetter vi da at η(x), med andre ord at trosfeltet til x er rasjonelt organisert, burde dette utsagnet at x = y være med i trosfeltet til x. Utfra slike overveielser virker det naturlig å hevde at aksiomet

I1 $x = y \rightarrow (\eta(x) \rightarrow T;z(x = y))$

er gyldig. Noe tilsvarende kan sies i forbindelse med utsagn av typen $x \neq y$. Er x og y objekter der $x \neq y$ virker det heller ikke urimelig å hevde at selve utsagnet at $x \neq y$ er

nødvendig sant. Man er tilbøyelig til å spørre om hvordan to objekter som er forskjellige i en verden, for eksempel den aktuelle verden, kan bli identiske når vi forflytter oss til en annen verden. Men hvis utsagnet at $x \neq y$ er nødvendig sant er det også nærliggende å se på aksiomet:

I2 $\quad x \neq y \rightarrow (\eta(x) \rightarrow T;z(x \neq y))$

som gyldig. I så fall bør det legges til blandt aksiomene i Kη.[6] At vi ikke har tatt med I1 og I2 blandt aksiomene i Kη har naturligvis ingen betydning for korrektheten til de satsene vi har utledet ovenfor.

Det er også noen andre temaer som kunne nevnes og som vi ikke har gått inn på ovenfor. Vi nevner til slutt ett slikt tema.

Operatoren T kan oppfattes som en relasjon mellom en person og et utsagn. Spørsmålet blir da hvordan man tenker seg at de utsagn skal individueres som beskriver forhold en person tror er tilfelle. Ser man på kalkylen Kη kunne man si at det er naturlig å tenke seg at de temmelig sterkt individuert. I denne kalkylen kan man ikke for eksempel slutte fra det forhold at $T;x(\alpha)$ til det at $T;x(\neg\neg\alpha)$. Heller ikke kan man slutte fra de to premissene $T;x(\alpha)$ og $T;x(\alpha\rightarrow\beta)$ at $T;x(\beta)$. Det er bare om x oppfyller kravet $\eta(x)$, dvs. om vi forutsetter at trosfeltet til x er det vi kaller rasjonelt organisert, at man kan foreta slike slutninger. I modeller for kalkylen Kη virker det derfor som om utsagnene som beskriver de forhold som en person tror er tilfelle må være svært ekstremt fint individuert. Utsagnet at $\neg\neg\alpha$ kan ikke uten videre være identisk med utsagnet at α. Utsagnet at α v β er ikke uten videre identisk med utsagnet at $\neg(\neg\alpha \,\&\, \neg\beta)$, osv. Dette virker ikke direkte urimelig, i det minste ikke for meg.

Hvis man imidlertid med utsagn mener det som vi i tidligere arbeider har omtalt som presise deskriptive utsagn, og krever at to setninger uttrykker det samme utsagn om de er logisk ekvivalente, forholder saken seg anneledes. Hvis man tenker seg at trosrelasjonen relaterer personer til slike utsagn er det klart at man for eksempel fra $T;x(\alpha)$ kan slutte $T;x(\neg\neg\alpha)$. I lys av en slik oppfatning vil naturligvis den følgende slutningsregel virke naturlig:

E $\quad \vdash \alpha \leftrightarrow \beta \;\rightarrow\; \vdash T;x(\alpha) \leftrightarrow T;x(\beta)$.

Vi gjør imidlertid oppmerksom på at ikke i noen av bevisene for de satsene vi har utledet er denne regelen forutsatt. Den har overhodet ikke blitt brukt. Disse satsene holder derfor hva enten man aksepterer denne regelen eller ikke.

Det gjenstår imidlertid å si noe om det er mulig å lage muligverdensbasert modellteori for de systemene vi har studert i de foregående paragrafer. Vi skal nå helt til slutt skissere en slik teori og knytte enkelte bemerkninger til denne.

I de neste avsnitt benytter vi følgende notasjon: Anta a og b er to mengder. Da betegner vi klassen av alle de funksjoner som har a som sitt domene, og sitt verdiområde inkludert i b, med b^a. Vi gjør også oppmerksom på at Pt(a), der a er en mengde, betegner potensmengden til a.

Vi går nå over til å definere hva vi mener med en modellstruktur for et språk L, der L er et predikatlogisk språk av den typen som vi har definert tidligere

[6] Det er en enorm mengde med litteratur om identitet i modallogikk, epistemisk og doxastisk logikk. Jeg gjør imidlertid oppmerksom på at det faller totalt utenfor rammen av dette arbeid å diskutere detaljert de synspunkter som har blitt fremsatt i denne forbindelse.

Definisjon: Med *en modellstruktur M for L* forstår vi et tuple M = <D,C,I,q,V>, der komponentene oppfyller de følgende krav:

(i) D, C og I er ikke-tomme mengder der C er inkludert i I.
(ii) q ê Pt(D)^I. Dette vil si at q er en funksjon som til hver mulig verden tilordner denne en delmengde av D. Det er meningen at mengden q(w) der wêI skal representere de individene i verdenen w hvor trosfeltet er rasjonelt organisert.
(iii) V er en funksjon som tilordner alle predikater i L, samt alle konnektiver og operatorer i L visse funksjoner. V(P) er definert ved tilfelle på følgende måte:

(a) Er P et n-ært predikat i L så er V(P)ê (Pt(D^n))^I
(b) Er P konnektivet ¬ så er V(P) ê Pt(I)^Pt(I)
(c) Er P konnektivet → så er V(P) ê Pt(I) ^(Pt(I)xPt(I))
(d) Er P konnektivet A så er V(P) ê Pt(I)^(Pt(I)^D)
(e) Er P operatoren T så er V(T)ê Pt(I)^(DxPt(I))

Man ser altså at V er en funksjon hvis domene er mengden som består av alle predikatene i L samt de tre konnektivene ¬, → og A.
(iv) Vi krever av V at den skal oppfylle de følgende krav:

(1) Anta Xê Pt(I)^D. Da må V(A) være slik at
(Aw)(wêC → (wêV(A)(X) ↔ (Aa)(aêD → wêX(a))))
(2) Anta XêPt(I). Da må V(¬) være slik at
(Aw)(wêC → (wêV(¬)(X) ↔ ¬(wêX)))
(3) Anta X,YêPt(I). Da må V(→) være slik at
(Aw)(wêC → (wêV(→)(X,Y) ↔ (wêX → wêY)))
(4) Anta wêC Da krever vi at <x,y>êV(=)(w) ↔ x=y
(5) Anta wêC. Da krever vi at V(η) = q(w)

Dette avslutter definisjonen.

I en modellstruktur M= <D,C,I,q,V> for L er det meningen at I representerer alle mulige verdener. D representerer mengden av alle mulige individer. Delmengden C representerer de verdnene hvor de vanlige setningslogiske og predikatlogiske konnektivene tolkes på klassisk vis. Man kunne derfor kalle C for de normale verdnene og de elementene i I som ikke er med i C for de unomale eller ikke-klassiske verdenene. De enkelte delmengder av I representerer de finstrukturerte utsagnene i modellstrukturen. Delmengdene av C representerer det vi i forskjellige andre sammenhenger har kalt for presise deskriptive utsagn. Er X en delmengde av I kaller vi IΩC for den deskriptive kjernen i X. To utsagn X og Y med den samme deskriptive kjerne vil være sanne i nøyaktig de samme klassiske verdener og er derfor logisk ekvivalente.

Anta nå at M= <D,C,I,q,V> er en modellstruktur for L. Da kaller vi υ for en verditilordning over L assosiert med M, hvis og bare hvis υ er en funksjon som tilordner alle variabeltegnene i L elementer i domenet D

For å fullføre beskrivelsen av den modellteorien vi har i tankene for L, må vi gjøre to ting. For det første må vi definere hva som menes med at en formel α i L er sann i en verden w i en modellstruktur M relativt til en verditilordning L assosiert med M. Dessuten må vi avgrense de modellklasser som vi tenker oss at svarer til henholdsvis systemet Kη og systemet Kη-. Det første gjøres ved den følgende definisjon:

Definisjon: Anta M=<D,C,I,q,t,V> er en modellstruktur for L og at υ er enverditilordning for L assosiert med modellstrukturen M. Da defineres hva som menes med at *en formel γ i L er sann i en verden w i en modellstruktur M relativt til en verditilordning L assosiert med M*, i symboler (M,w,υ) ⊨ γ, induktivt ved de følgende klausuler:

(i) Er P et n-ært predikat i L og x;1,...,x;n variabeltegn i L setter vi:
$(M,w,\upsilon) \models P(x;1,...,x;n) \leftrightarrow \langle \upsilon(x;1),...,\upsilon(x;n)\rangle \hat{e}\ V(P)(w)$
(ii) Er P predikatet η i L og x et variabeltegn i L setter vi:
$(M,w,\upsilon) \models \eta(x) \leftrightarrow \upsilon(x)\hat{e}\ q(w)$
(iii) Er P identitetspredikatet i L og x,y to variabeltegn i L setter vi:
$(M,w,\upsilon) \models x=y \leftrightarrow \langle \upsilon(x),\upsilon(y)\rangle \hat{e} V(=)(w)$
(iv) Er $\gamma = (\alpha \rightarrow \beta)$ setter vi:
$(M,w,\upsilon) \models \gamma \leftrightarrow w\hat{e}V(\rightarrow)(Mg(w': (M,w',\upsilon) \models \alpha)\ ,\ Mg(w': (M,w',\upsilon) \models \alpha))$
(v) Er $\gamma = \neg\alpha$ setter vi
$(M,w,\upsilon) \models \gamma \leftrightarrow w\hat{e}V(\neg)(Mg(w': (M,w',\upsilon) \models \alpha))$
(vi) Er $\gamma = (Ax)\alpha$ for et eller annet variabeltegn x setter vi
$(M,w,\upsilon) \models \gamma \leftrightarrow w\hat{e}V(A)(Mg(\langle a, Mg(w': (M,w',\upsilon(x/a)) \models \alpha)\rangle : a\hat{e}D))$
(vii) Er $\gamma = T;x(\alpha)$ for et eller annet variabeltegn x setter vi:
$(M,w,\upsilon) \models \gamma \leftrightarrow w\hat{e}V(T)(\upsilon(x), Mg(w': (M,w',\upsilon) \models \alpha))$
Dette avslutter definisjonen.

Som man ser vil enhver formel være sann eller usann i enhver verden. Men i de ikke-klassiske verdener kan man ha at merkverdige ting er tilfelle. Her kan i og for seg en formel og negasjonen av formelen være sanne samtidig.

Blandt modellstrukturene for L vil vi avgrense to delmengder Kη- modellstrukturene for L og (Kη-) -modellstrukturene for L.

Definisjon: Anta M = <D,C,I,q,V> er en modellstruktur for L. Da kalles M for en *Kη-modellstruktur for L* dersom den oppfyller følgende krav for alle wêC og alle aêq(w):

(i) Mg(y: yêPt(I) & C Inkl y) Inkl Mg(x: wêV(T)(a,x))
(ii) X,YêPt(I) & X,Yê Mg(x: wêV(T)(a,x)) & ZêPt(I) & ZΩC = XΩYΩC. → Zê Mg(x: wêV(T)(a,x))
(iii) Xê Mg(x: wêV(T)(a,x))& YêPt(I) & XΩC Inkl YΩC → Yê Mg(x: wêV(T)(a,x))
(iv) Xê Mg(x: wêV(T)(a,x))& Yê Pt(I) & YΩC = C -(XΩC) → ¬ (Yê Mg(x: wêV(T)(a,x))

Dernest definerer vi Kη- modell for L slik:

Definisjon: Anta M = <D,C,I,q,t,V> er en modellstruktur for L. Da kalles M for en *Kη--modelstrukturl for L* dersom den oppfyller følgende krav for alle wêC og alle aêq(w):

(i) Mg(y: yêPt(I) & C Inkl y) Inkl Mg(x: wêV(T)(a,x))
(ii) X,YêPt(I) & X,Yê Mg(x: wêV(T)(a,x)) & ZêPt(I) & ZΩC = XΩYΩC. → Zê Mg(x: wêV(T)(a,x))
(iii) Xê Mg(x: wêV(T)(a,x))& YêPt(I) & XΩC Inkl YΩC → Yê Mg(x: wêV(T)(a,x))

Man ser selvfølgelig fra disse definisjonene at klassen av modeller som svarer til Kη- er mer omfattende enn den som svarer til Kη, fordi man i en modell i den første klassen ikke krever at konsistenskravet (iv) skal være oppfylt.

Vi sier tilslutt at en formel α i L er gyldig i en modellstruktur M for L hvis og bare hvis formelen er sann i modellen M relativt til en enhver klassisk verden i L og enhver verditilordning for L assosiert med M. Betegner vi mengden av verditilordninger for L

assosiert med modellen M med Vto(L,M), og betegner klassen av absolutt alle modeller med |M| kan man si at dersom Mê |M| så har man at α er gyldig i M hvis og bare hvis:

$(A\upsilon)(\upsilon \hat{e}\ Vto(L,M)\ \&\ w\hat{e}Cl(M) \rightarrow (M,w,\upsilon) \models \alpha)$

Her betegner Cl(M) klassen av alle de klassiske verdenene i modellen M.

En formel α i L sies å være gyldig i svak forstand om den er gyldig i alle modellstrukturer. En formel sies å være Kη-gyldig om den er gyldig i enhver enhver Kη-modellstruktur for L, den sies å være Kη- -gyldig om den er gyldig i enhver Kη- -modellstruktur for L.

Dermed har vi beskrevet den modellteorien vi har hatt i tankene under arbeidet med kalkylene vi har utviklet ovenfor.

Det er åpenbart, når man har denne modellteorien i tankene, at systemet Kη, slik vi beskrev det, er ufullstendig selvom man kan vise at ethvert teorem er Kη-gyldig. Ufullstendigheten henger sammen med at aksiomene I1 og I2 er gyldige i enhver Kη-modell. Det er derfor større sannsynlighet for at Kη[I1,I2] er fullstendig med hensyn på klassen av alle de Kη-gyldige formlene i L. Vi har imidlertid ikke gitt noe bevis for dette. Påstanden er derfor bare en gjetning fra vår side. De samme bemerkninger gjelder Kη-. Teoremene i dette systemet er åpenbart (Kη-)-gyldige, men siden også I1 og I2 er gyldige i enhver (Kη-)-modell er systemet ufullstendig med hensyn på denne typen modeller. Derimot virker det mer sannsynlig at Kη-[I1,I2] er fullstendig med hensyn på de (Kη-)-gyldige formlene i L.

La oss helt tilslutt nevne at det er mulig å legge ytterligere krav på modellene av den typen vi har beskrevet her som korresponderer til de diverse aksiomene B1 - B12 som vi introduserte i §6. Antageligvis kan man vise fullstendigheten til Kη, eventuelt Kη-, utvidet med et eller flere av disse skjemaene, samt tilføyd I1 og I2, om man velger ut modellklasser som oppfyller de krav som svarer til de diverse aksiomskjemaene. Men vi skal ikke gå nærmere inn på dette.

Referanser

Becker [1] Becker, Oskar. 1930. "Zur Logik der Modalitäten". *Jahrbuch für Philosophie und Phänomenologische Forschung*. Vol. 11, 497-548

Chellas [1] Chellas, Brian F.1980.*Modal Logic, an Introduction*. London: Cambridge University Press

Feys [1] Feys, R. "Les logiques nouvelles des modalités" *Revue Néoscholastique de Philosophie* Vol. 40 (1937) 517-553 og Vol. 41 (1938) 217-252

Hintikka [1] Hintikka, Jaakko.1962. *Knowledge and Belief*. London: Cornell University Press

Hughes and Cresswell [1] Hughes,G.E og Cresswell, M.J.1968. *An Introduction to Modal Logic*. London: Methuen

Rognes [1] Rognes, Morten. 1973. *Undersøkelser i intensjonal logikk*. Upublisert manuskript

Sobociński [1] Sobociński, B. 1953. "Note on a modal system of Feys- Von Wright". *The Journal of Computing Systems*. Vol 1, 171-178

von Wright [1] von Wright, G.H. 1951. *An essay in modal logic.* Amsterdam: North Holland Publishing Co.